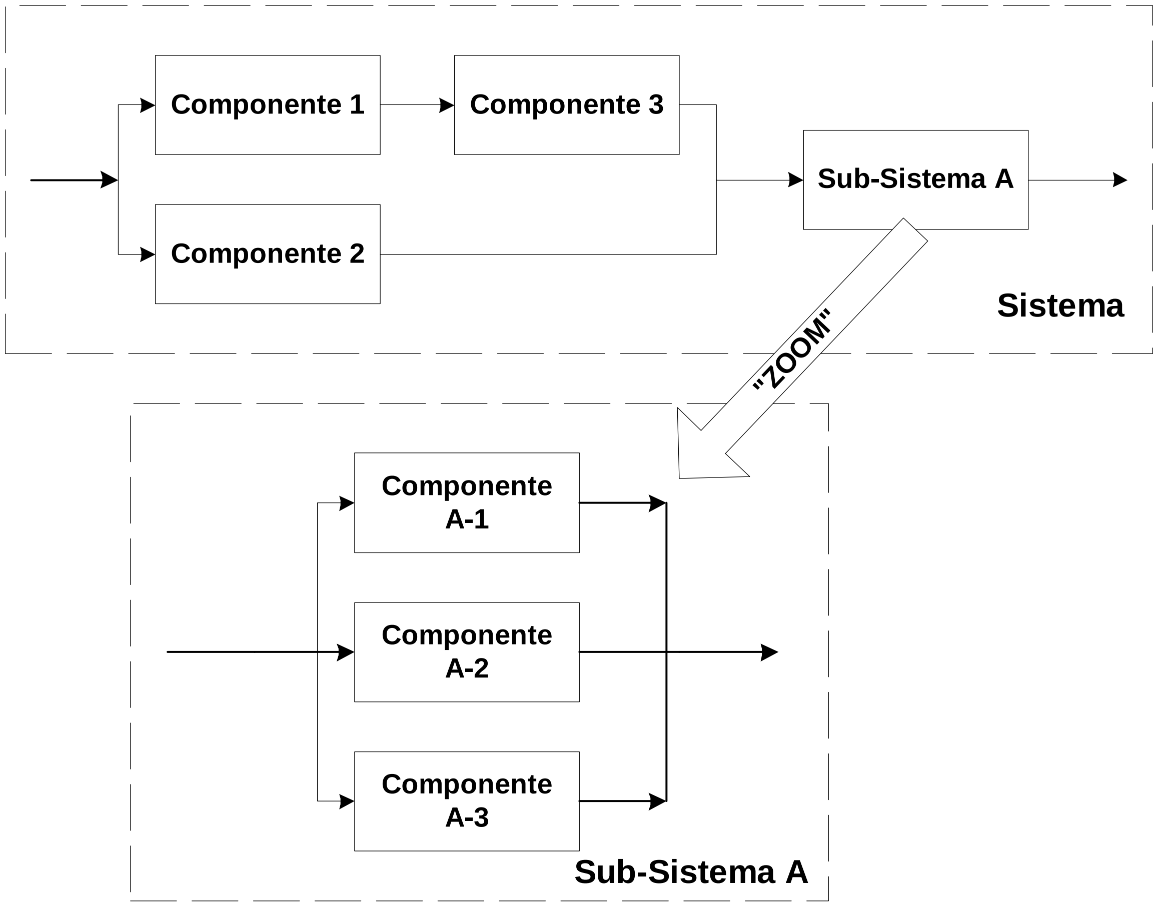
Análise da Confiabilidade de Componentes Não Reparáveis

1. Componentes versus Sistemas

- *Sistema* é um conjunto de dois ou mais componentes interconectados para a realização de uma ou mais funções
- A distinção entre sistema, sub-sistema e componente é meramente por conveniência de modelagem e determinada, muitas vezes na prática, pelo nível de detalhamento desejado assim como pelo nível de informação (dados de falha, manutenção, etc) que se tem a disposição. Veja a seguinte ilustração.



2. Sistemas Reparáveis versus Não Reparáveis

- *Componente ou Sistema Não Reparável*:
  - É aquele que para os objetivos da presente análise de confiabilidade está operando em $t = 0$ (início do período de observação) e que continua em serviço até o tempo de falha em $T = t$

    - Ao ocorrer uma falha, nós não consideramos a possibilidade de o mesmo ser reparado e colocado novamente em operação
    - Assim, pode-se considerar que um componente não reparável é aquele que é descartado ou substituído por um novo componente quando o mesmo falha:
        - A “manutenção” do mesmo compreenderia em sua completa substituição por um novo componente
    - Se o mesmo não é substituído por um novo componente, considera-se que a “manutenção” simplesmente restabelece o componente para o estado operacional como se fosse novo! Obviamente, cuidado é necessário ao fazer esta consideração
    - Note que o conceito de componente (ou componente) não reparável é dependente dos objetivos da análise de confiabilidade bem como da informação disponível sobre o componente durante a nossa análise
    - Exemplos:
        - Lâmpadas
        - Transistores
        - Pentes de memória RAM
        - Alguns eletrodomésticos (dependendo do custo de manutenção versus a compra de um novo equipamento)
        - Alguns tipos de satélites não passíveis de manutenção
    - A confiabilidade de sistemas/componentes não reparáveis é analisada através da distribuição do tempo de falha. Esta distribuição pode ser representada pela função de densidade de probabilidade (PDF), função de distribuição acumulada (CDF), ou taxa de falha
- *Componente ou Sistema Reparável*:
    - É aquele que após falhar é colocado novamente em operação através de qualquer procedimento que não seja a completa substituição do mesmo
    - É passível de manutenção
    - Sofre reparo
- Neste capítulo utilizaremos o termo componente para nos referirmos ao item a ser analisado
- Modelos e procedimentos serão apresentados e discutidos para a análise de confiabilidade de componentes (sistemas, sub-sistemas) não reparáveis

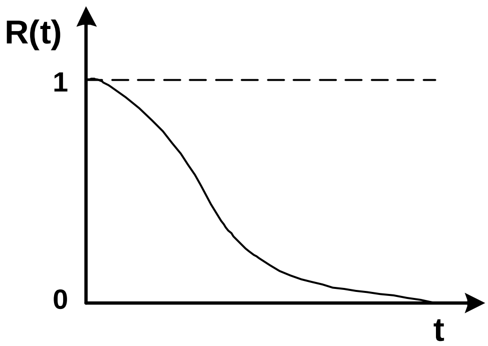
3. A Função de Confiabilidade

- *Confiabilidade*, R, é definida como a probabilidade que um sistema (componente) irá funcionar durante algum período de tempo t
- Sendo T a variável aleatória contínua que expressa o tempo de falha do componente, $T \geq 0$, a *Função de Confiabilidade*, $R(t)$, pode ser expressa como:

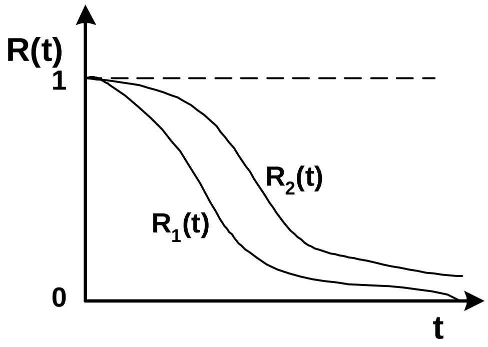
$$R(t) = P(T \geq t) \;\; ; t \geq 0$$

onde t é o instante final do período durante o qual o componente é observado (é o tempo de missão do mesmo). O componente falha em t ou após t

- A função de confiabilidade, $R(t)$, deve satisfazer três condições:
  - $R(0) = 1$
  - $\lim_{t \to \infty} R(t) = 0$
  - $R(t) \geq 0$, ou seja, a confiabilidade é monotônica decrescente (não-crescente) para todo t. Veja a seguinte figura.



- A função de confiabilidade pode ser interpretada de duas formas:
  - $R(t)$ é a probabilidade que um determinado componente esteja operando em t
  - Se observarmos um conjunto dos mesmos componentes, $R(t)$ é a fração esperada da população que está operacional em t
- A função de confiabilidade pode ser usada para comparar o comportamento de diversos componentes:
  - Por exemplo, considere dois componentes iguais produzidos por diferentes fabricantes cujas curvas de confiabilidade são mostradas a seguir



- Como $R_2(t) > R_1(t)$ para todo t, pode-se dizer que equipamentos feitos por fabricante 2 são superiores do que os feitos pelo fabricante 1 quanto a confiabilidade

4. Função de Distribuição Acumulada (CDF)

- A *Função de Distribuição Acumulada* é definida como

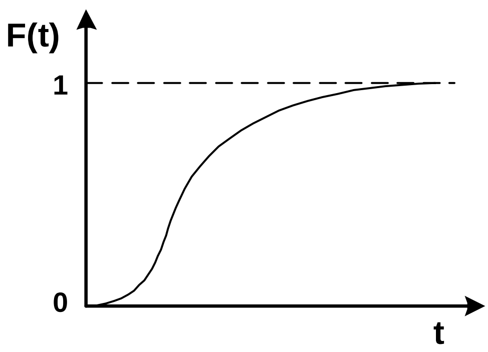
$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - P(T \geq t)$$

logo,

$$F(t) = P(T < t)$$

que corresponde a probabilidade que o componente falhe <u>antes</u> de t.

- Note que:
  - $F(0) = 0$
  - $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$
  - $F(t)$ é uma função monotônica decrescente. Veja a próxima figura

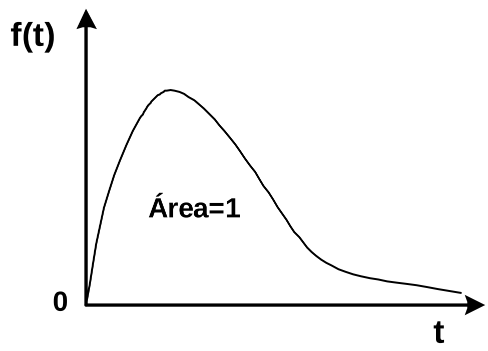


5. Função de Densidade de Probabilidade (PDF)

- A *Função de Densidade de Probabilidade* é definida por:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

- Como vimos, a PDF descreve a forma da distribuição do tempo de falha. É a representação "visual" da distribuição do tempo de falha (veja a próxima figura)
- A PDF $f(t)$ possui as seguintes propriedades:
  - $f(t) \geq 0$
  - $\int_0^{\infty} f(t)dt = 1$, para todo $t \geq 0$



- Tendo-se a PDF $f(t)$, podemos obter $R(t)$ e $F(t)$:
  - CDF:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$
$$dF(t) = f(t)dt$$

integrando,

$$\int_{F(0)}^{F(t)} dF(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

resultando em:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

- Confiabilidade:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$
$$dR(t) = -f(t)dt$$

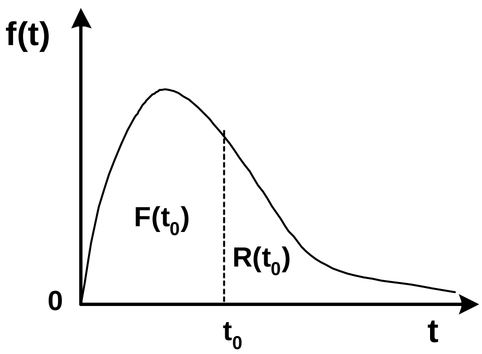
integrando,

$$\int_{R(0)}^{R(t)} dR(t) = -\int_0^t f(v)dv \Rightarrow -\int_{R(t)}^{R(\infty)} dR(t) = \int_t^{\infty} f(v)dv$$

logo,

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(v)dv$$

- É importante notar que a função de confiabilidade, $R(t)$ e a função de distribuição acumulada, $F(t)$, representam áreas sob a curva definida pela função densidade de probabilidade $f(t)$:



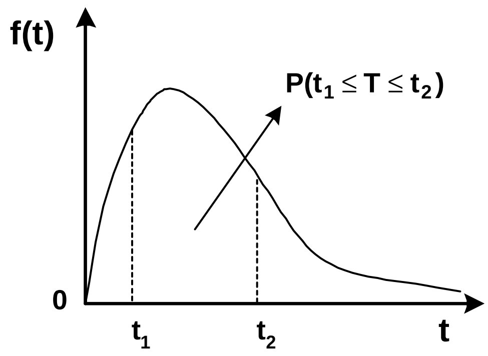
  - $F(t_0)$ é a probabilidade de falha antes de t_0
  - $R(t_0)$ é a probabilidade de que a falha ocorra após ou em t_0
  - Assim, se observarmos uma população dos mesmos componentes, $F(t_0)$ corresponde à fração de componentes que falharão antes de t_0, e $R(t_0)$ é a fração de componentes que irão falhar após ou em t_0

- A probabilidade de que uma falha ocorra entre os instantes $T = t_1$ e $T = t_2$, ou seja, dentro do intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dada por:

$$P(t_1 \leq T \leq t_1) = F(t_2) - F(t_1) = R(t_1) - R(t_2)$$

o que resulta em (veja a próxima figura):

$$P(t_1 \leq T \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$



☞ *Exemplo 1*:

Dada a seguinte função de densidade de probabilidade para o tempo de falha (em horas de operação) de um compressor,

$$f(t) = \frac{0.001}{(0.001t + 1)^2} \quad ; t \geq 0$$

(a) qual é a confiabilidade para uma missão de 100 horas? (b) Qual é a probabilidade de falha deste compressor entre 10 horas e 100 horas?

6. Tempo Médio de Falha (MTTF)

- O *Tempo Médio de Falha (MTTF - Mean Time To Failure)* é definido por

$$MTTF = E(T) = \int_0^\infty t f(t)dt$$

o qual corresponde a média, ou valor esperado, da distribuição de probabilidade do tempo de falha T

- Pode-se mostrar que:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

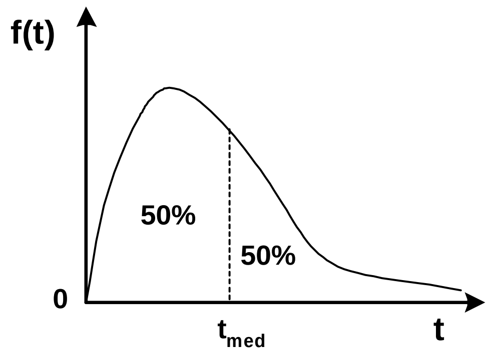
a qual é uma expressão mais fácil de aplicar na prática do que a anterior.

7. Outras Medidas de Tendência Central da Distribuição do Tempo de Falha

- A média, MTTF, do tempo de falha de um componente é apenas uma das possíveis medidas de tendência central da distribuição de T. Outras medidas são também usadas em análise de confiabilidade, como as que seguem.
- *Mediana*:
  - A mediana do tempo de falha T de um componente é definida como:

$$R(t_{med}) = P(T \geq t_{med}) = 0.5$$

  - A mediana divide a distribuição em duas metades com 50% de chance do componente falhar antes da mediana do tempo de falha e 50% de chance da falha ocorrer após a mediana de T
  - Equivalentemente, para uma população de componentes, tem-se 50% das falhas ocorrendo antes da mediana de T e 50% das falhas acontecendo após t_{med} (veja a figura que segue)



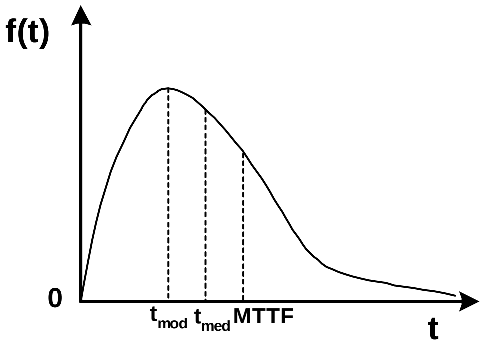
  - Na prática, a mediana t_{med} é preferível à média (MTTF) quando a distribuição de T é altamente não simétrica (a distribuição é "skewed")
- *Moda*:
  - A moda de T corresponde ao valor mais provável de ocorrer (de ser observado) do tempo de falha, ou seja,

$$f(t_{\text{mod}}) = \max_{0 \leq t < \infty} f(t)$$

  - t_{mod} equivale ao máximo da função de densidade de probabilidade (PDF)
  - Portanto, para um intervalo de tempo em torno da moda t_{mod}, a probabilidade de falha será maior neste intervalo do que para qualquer

outro intervalo de tempo do mesmo tamanho (que não inclua t_{mod} !)

- Observe no próximo gráfico da densidade de probabilidade (PDF) as posições relativas entre o MTTF, t_{med}, e t_{mod}



☞ *Exemplo 2 (Resolver)*:

Considere a seguinte PDF:

$$f(t) = 0.002e^{-0.002t} \quad ; t \geq 0$$

com t em horas. Determine (a) a função de confiabilidade, (b) o MTTF, © a mediana t_{med} do tempo de falha, (d) a moda t_{mod} do tempo de falha

---

- Importante:
  - Mesmo que dois componentes possuam o mesmo MTTF, as suas confiabilidades podem ser bem distintas para o mesmo tempo operacional! Veja o exemplo que segue.

☞ *Exemplo 3*:

- Para o exemplo 2,

$$R_1(t) = e^{-0.002t}$$

com $MTTF = 500h$. Considere agora que temos um segundo componente cuja confiabilidade é fornecida pela seguinte expressão:

$$R_2(t) = \frac{1000 - t}{1000} \quad ; (0 \leq t \leq 1000)h$$

onde $MTTF_2 = 500h$. Ou seja, ambos os componente possuem tempos médios de falha iguais: $MTTF_1 = MTTF_2$.

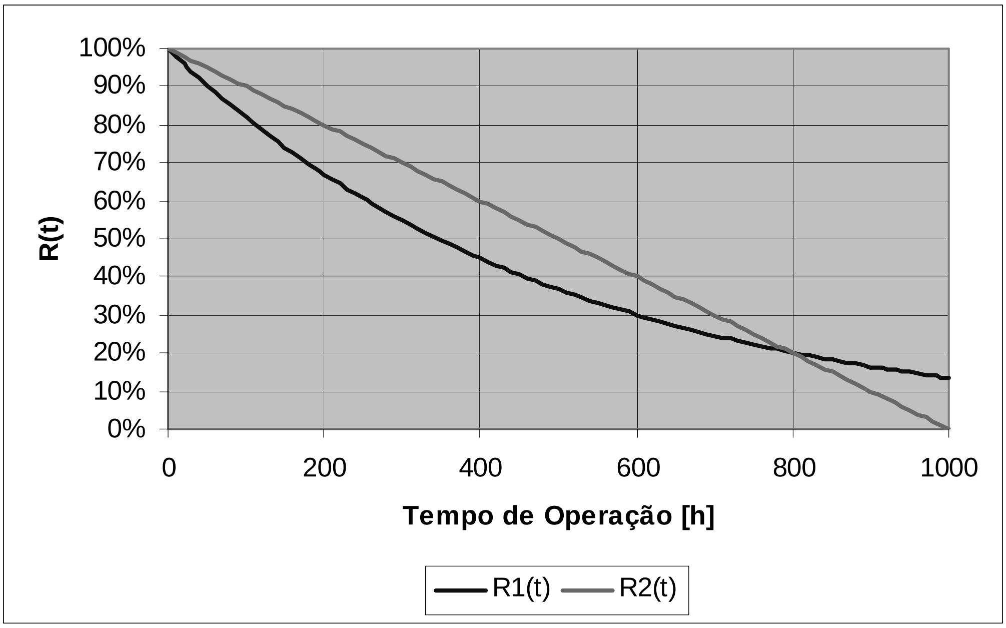
Porém, para $T = 400h$:

$$R_1(400) = e^{-0.002x400} = 0.449$$

$$R_2(400) = \frac{1000 - 400}{1000} = 0.60$$

resultando em níveis de confiabilidade substancialmente diferentes para os componentes em um mesmo período de operação!

- Observe o próximo gráfico representando a variação da confiabilidade com o tempo para ambos os componentes



- Logo, o MTTF por si só não caracteriza completamente a distribuição do tempo de falha de um certo componente ou sistema e deve ser utilizado com cautela quando analisando/comparando distintos componentes ou sistemas
- Outras medidas são necessárias, como a variância

- *Variância*:
  - Como vimos, a variância é uma medida de dispersão dos tempos de falha em torno do MTTF (média):

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - MTTF)^2 f(t)dt$$

  - A variância também pode ser dada como:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - MTTF^2$$

a qual computacionalmente é mais estável e preferível do que a expressão anterior.

- *Desvio Padrão*:
  - Corresponde a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

  - É mais fácil de interpretar do que a variância σ^2 uma vez que o desvio padrão σ possui a mesma dimensão (unidade) do tempo de falha T

☞ *Exemplo 4 (Resolver)*:

A partir das funções de densidade de probabilidade (PDF) do exemplo 3, determine (a) as variâncias (b) e os desvios padrões dos tempos de falha de ambos os componentes.

---

8. Taxa de Falha

- *Taxa de Falha* ou *Força de Mortalidade Instantânea*, $h(t)$:
  - É a probabilidade de falha por unidade de tempo do componente (ou sistema) uma vez que o mesmo tenha operado até o instante t :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

  - Ou seja, a taxa de falha é a probabilidade condicional de falha por unidade de tempo (instantânea) dado que o componente (ou sistema) já tenha operado até o instante t
  - Como esta expressão é obtida?
    - Sabemos que a probabilidade de falha em um intervalo de tempo Δt, ou seja, de $T = t$ até $T = t + \Delta t$ é dada por:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t) = R(t) - R(t + \Delta t)$$

    - A probabilidade condicional de falha no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ dado que o componente (ou sistema) tenha operado até o instante t é:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{P\left[(t \leq T \leq t + \Delta t) \cap (T \geq t)\right]}{P(T \geq t)}$$

Mas note que $(t \leq T \leq t + \Delta t) \cap (T \geq t) = t \leq T \leq t + \Delta t$, logo pode-se escrever

$$P\left[(t \leq T \leq t + \Delta t) \cap (T \geq t)\right] = P(t \leq T \leq t + \Delta t)$$

Portanto,

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T \geq t)}$$

- Escrevendo em termos de confiabilidade:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

Dividindo pelo intervalo Δt e calculando o limite para $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t}$$

o qual corresponde a probabilidade condicional de falha por unidade de tempo, ou seja, a taxa de falha $h(t)$:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t}$$

Rearrumando o lado direito,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\left[R(t + \Delta t) - R(t)\right]}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R(t)}$$

Logo,

$$h(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)}$$

mas como $f(t) = -dR(t)/dt$, tem-se

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

a qual é a taxa de falha ou força de mortalidade instantânea.

- *Taxa de Falha Acumulada,* $H(t)$:
  - Corresponde a taxa de falha acumulada durante um período de tempo t, i.e., $[0, t]$

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

  - $H(t)$ tem as seguintes propriedades:
    - $H(0) = 0$
    - $\lim_{t \to \infty} H(t) = \infty$, ou seja, o componente vai falhar!
    - $H(t)$ É uma função não decrescente

9. Caracterização do Tempo de Falha de um Componente

- Uma determinada função de densidade de probabilidade, função de confiabilidade, função de distribuição acumulada, taxa de falha, ou taxa de falha acumulada especifica/caracteriza completamente a distribuição do tempo de falha de um componente
- Ou seja, com qualquer uma destas funções, $f(t), R(t), F(f), h(t), H(t)$, pode-se determinar qualquer uma das outras funções e assim caracterizar por completo o comportamento do tempo de falha de um componente
- Por exemplo, a confiabilidade pode ser obtida a partir da taxa de falha da seguinte forma:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\tau) d\tau\right]$$

- Em geral,

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = -\ln R(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{R(\tau)} d\tau$$

☞ *Exemplo 5*:

Dada a taxa de falha linear $h(t) = 5x10^{-6} t$, onde t está em horas, qual é o tempo de operação atingido para uma confiabilidade desejada de 98%?

▸ Tem-se que:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\tau)d\tau\right] = \exp\left[-\int_0^t 5x10^{-6}\,\tau d\tau\right]$$

$$R(t) = \exp\left[-2.5x10^{-6}t^2\right]$$

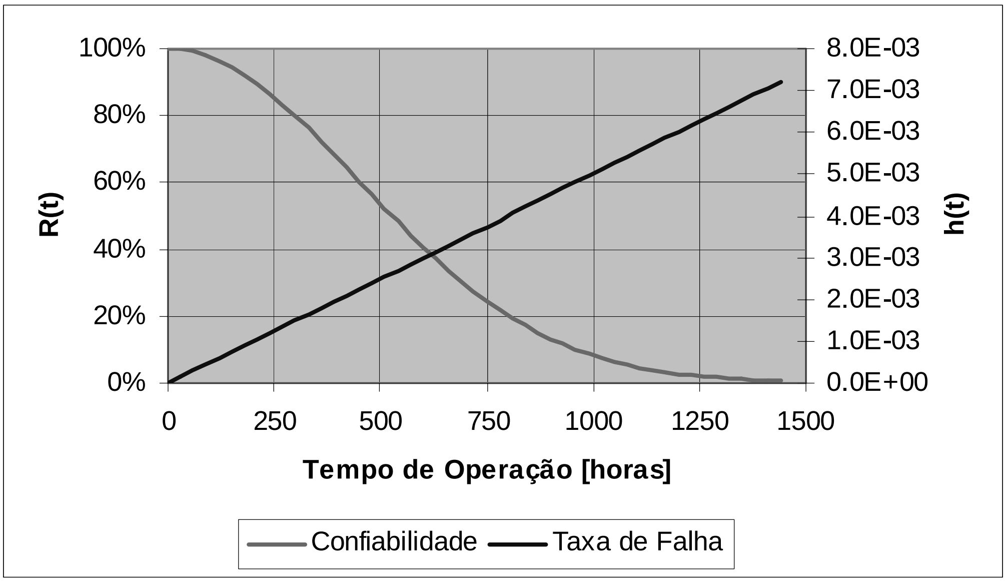
Para um nível de confiabilidade de 98% o tempo operacional correspondente é:

$$R(t_{98}) = \exp\left[-2.5x10^{-6}t_{98}{}^2\right] = 0.98$$

resolvendo para t_{98}:

$$t_{98} = 89.89 \approx 90\ horas$$

Observe no próximo gráfico o comportamento da taxa de falha e da confiabilidade deste equipamento em função do tempo operacional. Observe que com o aumento do tempo de operação do equipamento, o mesmo apresenta uma menor confiabilidade. Ou seja, é menos provável que este equipamento complete a sua missão uma vez que a probabilidade condicional de falha do mesmo aumenta enquanto o equipamento se mantém em serviço.



☞ *Exemplo 6 (Resolver)*:

No exemplo anterior, qual é a taxa de falha acumulada?

☞ *Exemplo 7 (Resolver)*:

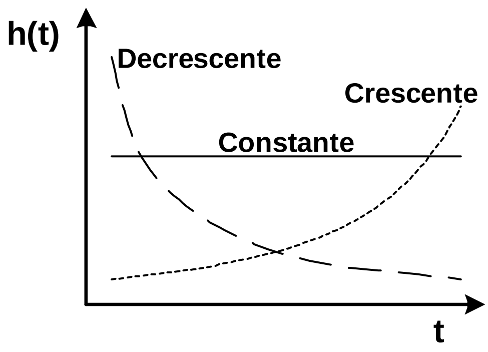
Um compressor tem confiabilidade dada por:

$$R(t) = 1 - \frac{t^2}{a^2} \quad ; 0 \le t \le a$$

onde a é um parâmetro representando o tempo máximo (útil) de operação do compressor. (a) Encontre $f(t)$, (b) determine a taxa de falha do compressor, © e o seu MTTF, (d) construir os gráficos da confiabilidade, PDF e taxa de falha deste equipamento em função do seu tempo operacional.

10. A Curva da Banheira

- A forma da taxa de falha indica como o componente "envelhece", ou seja, a taxa de falha mostra as mudanças na probabilidade de falha de um componente ao longo de sua operação
- Comportamento da taxa de falha: em geral, podem-se identificar três tipos básicos da taxa de falha (veja a próxima figura)



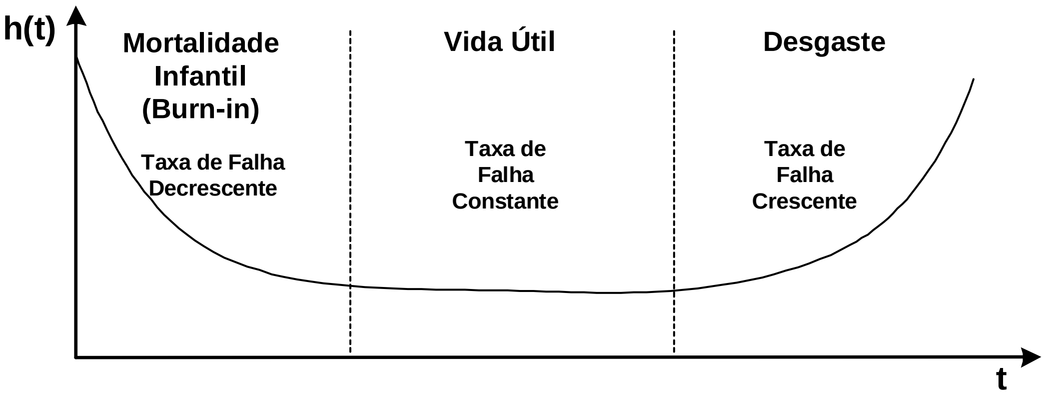
- Crescente:
    - O componente está sujeito a um processo de desgaste
    - O componente possui uma maior probabilidade de falha à medida que o tempo operacional aumenta
- Decrescente:
    - O componente possui uma menor probabilidade de falha com o passar do tempo operacional
    - Observa-se em geral no início da operação de um novo

componente o qual sofre falhas devido a defeitos de projeto, manufatura ou construção, ou instalação do mesmo

- Da mesma forma, ao se observar um conjunto dos mesmos componentes, uma taxa de falha decrescente pode representar esta população na qual somente alguns componentes são defeituosos. Assim, quando a população de componentes é inicialmente colocada em serviço, a taxa de falha pode ser relativamente elevada até que os componentes defeituosos são removidos devido à falha dos mesmos e a taxa de falha observada decresce

- Constante:
    - O componente possui uma taxa de falha aproximadamente constante
    - As falhas são aleatórias, ou seja, a probabilidade de falha do componente é a mesma para qualquer valor do tempo operacional

- Na prática, um componente pode apresentar uma combinação dos três tipos básicos levando a taxa de falha a apresentar um formato de "banheira"
    - É a chamada *Curva da Banheira*, como mostra a próxima ilustração:



- A taxa de falha inicialmente decresce, depois tem um período de baixa taxa de falha (possivelmente constante), e então $h(t)$ cresce à medida que o componente (ou sistema) "envelhece"
- Ao observar um grupo de componentes:
    - Os processos de manufatura introduzem falhas em alguns dos componentes fabricados
    - Estas falhas não são detectadas, levando a falhas precoces de

alguns desses componentes

- O fabricante então utiliza o *Burn-in*, ou seja, os componentes são testados na fábrica para assim detectar os componentes falhos(com defeitos de fabricação antes dos mesmos chegarem ao consumidor

- A tabela que segue resume as principais características da curva da banheira

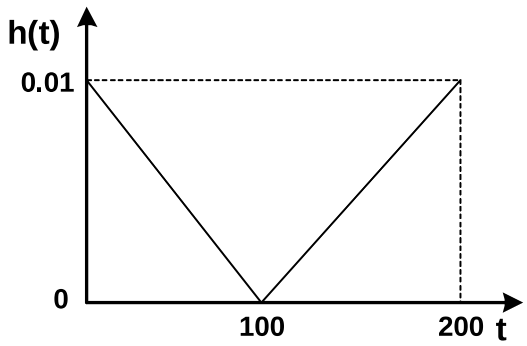
Etapa	**Caracterização**	**Causas**	**Paliativos Para Redução**
Mortalidade Infantil	Taxa de Falha Decrescente	Defeitos de fabricação: • Soldagens • Fissuras • Rachaduras • Problemas no controle de qualidade • Erro humano (treinamento) • Erros de montagem	▸ Burn-in ▸ Controle de qualidade ▸ Testes de aceitação
Vida Útil	Taxa de Falha Aproximadamente Constante	• Cargas externas aleatórias • Erros humanos • Eventos não previstos (aleatórios)	▸ Uso de Redundâncias ▸ Over-design (super-especificações)
Desgaste	Taxa de Falha Crescente	• Fadiga • Corrosão • Envelhecimento (tempo operacional) • Fricção • Cargas cíclicas	▸ Manutenção preventiva ▸ Substituição de componentes ▸ Melhoria da tecnologia ▸ Manutenção centrada em confiabilidade

☞ *Exemplo 8*:

A taxa de falha de um equipamento é dada por:

$$h(t) = \begin{cases} 0.01 - 0.0001t & ; 0 \le t \le 100 \\ -0.01 + 0.0001t & ; t > 100 \end{cases}$$

como é mostrado na seguinte figura:



(a) Encontre a PDF

(b) Determine a função de confiabilidade $R(t)$

▸ Sabemos que $h(t) = f(t)/R(t)$. Logo,

$$f(t) = h(t)R(t)$$

mas,

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\tau)d\tau\right]$$

logo,

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(\tau)d\tau\right]$$

Para $0 \le t \le 100$:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t (0.01 - 0.0001\tau)d\tau\right]$$

$$R(t) = \exp\left[-0.01t + 0.00005t^2\right]$$

logo,

$$f(t) = (0.01 - 0.0001t)\exp\left[-0.01t + 0.00005t^2\right]$$

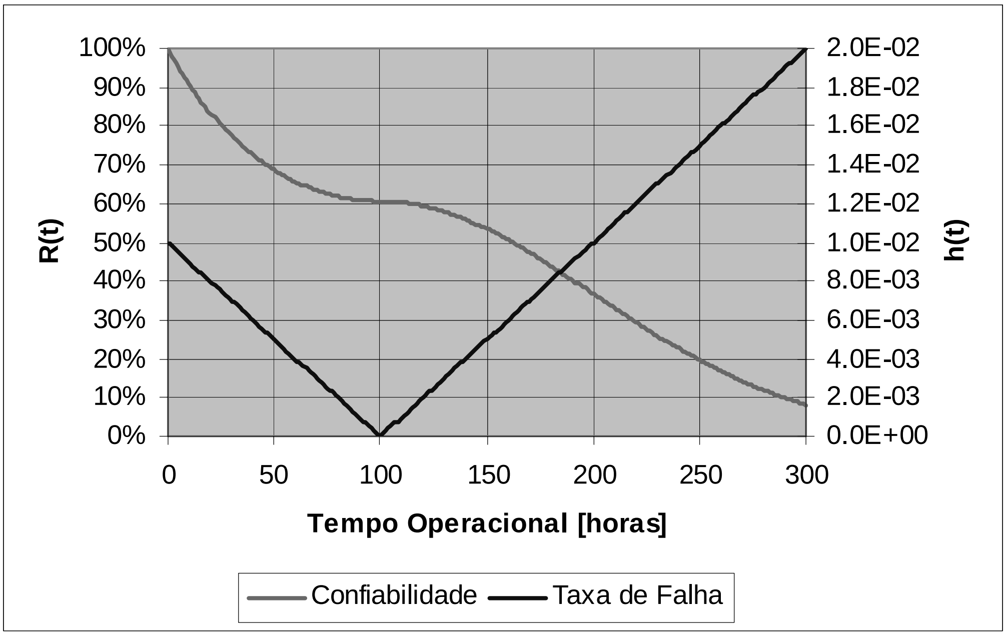
Para $t > 100$:

$$R(t) = R(100)\exp\left[0.01t - 0.00005t^2 - 0.5\right]$$

Note que devemos multiplicar a expressão anterior por $R(100)$ uma vez que o equipamento já tem estado em operação por 100 horas. Então,

$$f(t) = (-0.01 + 0.0001t)R(100)\exp\left[0.01t - 0.00005t^2 - 0.5\right]$$

Observe na próxima figura o comportamento da confiabilidade e da taxa de falha deste equipamento.



---

11. Confiabilidade Condicional

- *Confiabilidade Condicional* é a probabilidade de que um componente (ou sistema) irá operar por um tempo adicional t dado que o mesmo já tenha operado durante um período T_0:

$$R(t|T_0) = \frac{R(T_0 + t)}{R(T_0)}$$

- Como esta expressão é obtida?
  - A confiabilidade de um componente (ou sistema) operar por um tempo adicional t uma vez que o mesmo já tenha operado por um período T_0 é

$$R(t|T_0) = P\left(T \geq T_0 + t|T \geq T_0\right)$$

Como $\left(T \geq T_0 + t\right) \cap \left(T \geq T_0\right) = \left(T \geq T_0 + t\right)$, tem-se

$$R(t|T_0) = \frac{P\left[\left(T \geq T_0 + t\right) \cap \left(T \geq T_0\right)\right]}{P\left(T \geq T_0\right)} = \frac{P\left(T \geq T_0 + t\right)}{P\left(T \geq T_0\right)}$$

Em termos de confiabilidade,

$$R(t|T_0) = \frac{R\left(T_0 + t\right)}{R(T_0)}$$

- A confiabilidade condicional pode ser expressa em termos da taxa de falha da seguinte maneira:

$$R(T_0) = \exp\left[-\int_0^{T_0} h(\tau)d\tau\right]$$

$$R(T_0 + t) = \exp\left[-\int_0^{T_0+t} h(\tau)d\tau\right]$$

Substituindo na expressão anterior para $R(t|T_0)$, obtém-se

$$R(t|T_0) = \exp\left[-\int_{T_0}^{T_0+t} h(\tau)d\tau\right]$$

- Em termos práticos, o conceito de confiabilidade condicional é bastante útil quando, por exemplo, T_0 corresponde a um período de burn-in ou de garantia. Veja o próximo exemplo.

☞ *Exemplo 9*:

Seja

$$h(t) = \frac{0.5}{\sqrt{1000}} t^{-1/2}$$

com t em anos, a taxa de falha (decrescente) de um determinado componente eletrônico usado em um tubo de raio-x de ânodo móvel.

- Tempo de operação para uma confiabilidade de 90%:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\tau)d\tau\right] = \exp\left[-\int_0^t \frac{0.5}{\sqrt{1000}}\tau^{-1/2}d\tau\right]$$

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{1000}\right)^{1/2}\right]$$

Assim, para uma confiabilidade alvo de 90% o tempo operacional atingido é:

$$R(t_{90}) = \exp\left[-\left(\frac{t_{90}}{1000}\right)^{1/2}\right] = 0.9$$

$$t_{90} \approx 11\ anos$$

- Suponha agora que o fabricante realiza um "burn-in" de 6 meses para estes componentes antes de envia-los ao consumidor (i.e., o fabricante dos tubos de raio-x). Temos agora $T_0 = 6\ meses = 0.5\ ano$. Então, o tempo operacional para um nível de confiabilidade de 90% agora é obtido da seguinte forma:

$$R(t|T_0) = \frac{R(T_0+t)}{R(T_0)} = \frac{\exp\left[-\left(\frac{t_{90}+0.5}{1000}\right)^{1/2}\right]}{\exp\left[-\left(\frac{0.5}{1000}\right)^{1/2}\right]} = 0.9$$

obtendo-se

$$t_{90} = 15.8 \approx 16\, anos$$

Isto significa um aumento de mais de 4 anos na vida operacional deste componente resultante de um período de 6 meses de "burn-in"!

- Note que o melhor desempenho obtido devido ao "burn-in" somente é possível se o componente em questão tiver uma taxa de falha decrescente. Veja o exemplo que segue.

☞ *Exemplo 10*:

Considere que um certo tipo de bomba possui a seguinte taxa de falha:

$$h(t) = 0.5t$$

onde t é medido em anos. Observe que agora a taxa de falha é crescente.

- O tempo de operação para um nível de confiabilidade de 90% é dado por:

$$\exp\left[-0.25 t_{90}{}^{2}\right] = 0.9$$
$$t_{90} \approx 237\, dias$$

- Agora, considerando um período de "burn-in" de 1 mês apenas (0.083 ano):

$$R(t|T_0) = \frac{\exp\left[-0.25\left(t_{90} + 0.083\right)^{2}\right]}{\exp\left[-0.25(0.083)^{2}\right]} = 0.90$$

obtendo-se

$$t_{90} \approx 209\, dias$$

- Logo, o tempo operacional desta bomba diminui como resultado do "burn-in", ou seja, como conseqüência da mesma já estar operando por 1 mês quando chegou nas mãos do consumidor!
- Como a taxa de falha é crescente, este comportamento é esperado pois o equipamento tem uma maior probabilidade de falhar com o acumulo do tempo de operação.

12. Distribuições Contínuas de Probabilidade

- Nas próximas seções iremos estudar diversas distribuições de probabilidade utilizadas em confiabilidade para descrever processos de falha
- A distribuições a serem discutidas são:
  - Exponencial
  - Weibull
  - Normal
  - LogNormal
- Estas distribuições de probabilidade são ditas teóricas uma vez que as mesmas são obtidas matematicamente e não empiricamente. As distribuições empíricas de probabilidade serão estudadas posteriormente neste capítulo

13. A Distribuição Exponencial

- É uma das mais conhecidas e usadas distribuições de probabilidade em análise de confiabilidade de sistemas:
  - Fácil de usar: matematicamente simples requerendo apenas a quantificação de um único parâmetro
  - Aplicável em situações onde a taxa de falha é (aproximadamente) constante:
    - O componente/sistema não apresenta maior ou menor probabilidade de vir a falhar com o acúmulo do tempo operacional
    - As falhas são aleatórias
    - O componente ou sistema não deteriora ou melhora com o tempo em operação
- Caracterização:
  - Parte-se do princípio de que a taxa de falha é constante:

$$h(t) = \lambda \;;\lambda > 0, t \geq 0$$

  - Confiabilidade:

    Sabemos que

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\tau)d\tau\right]$$

    como $h(t) = \lambda$,

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

- Função de Distribuição Acumulada (CDF):

$$F(t) = 1 - R(t)$$

logo,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

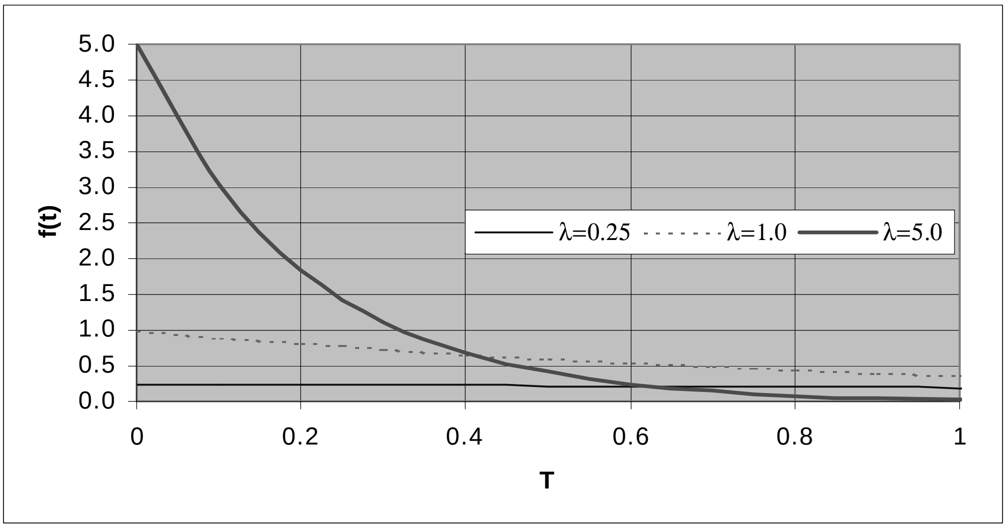
- Função de Densidade de Probabilidade (PDF):

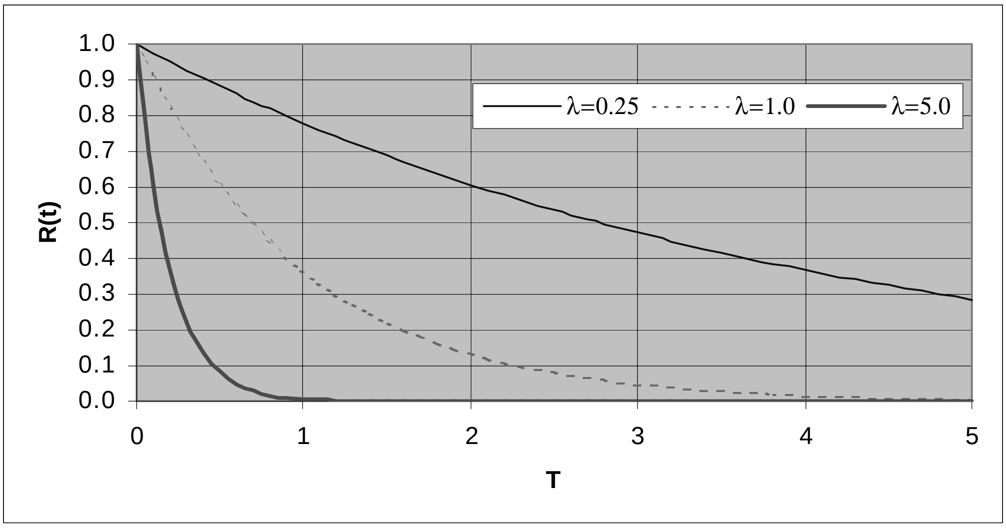
$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

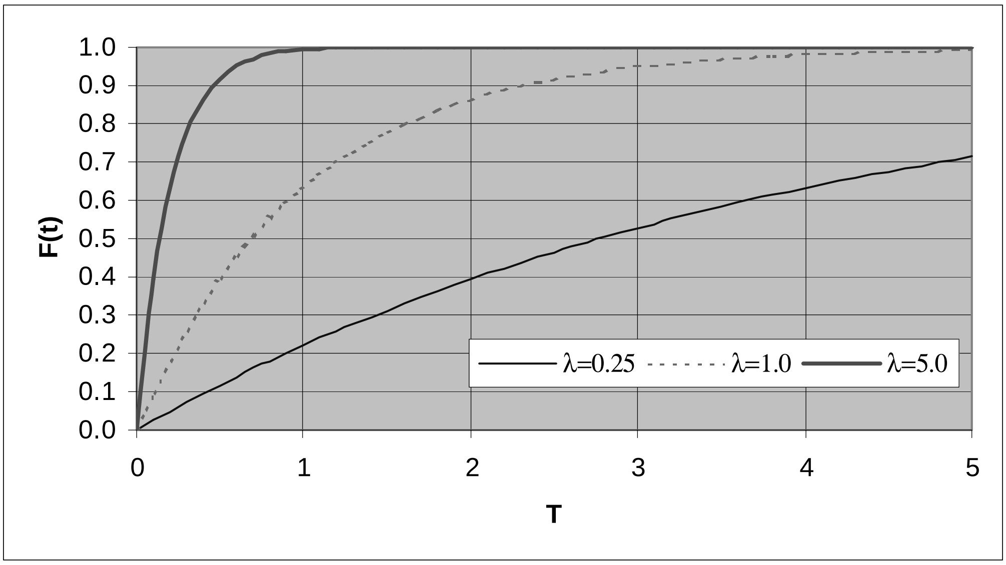
então,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Estas funções estão representadas nos gráficos que seguem para diversos valores de λ







- MTTF:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

Substituindo a expressão da confiabilidade para a distribuição exponencial:

$$MTTF = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^\infty$$

notando que $e^{-\lambda(\infty)}$ corresponde a zero e que $e^{-\lambda(0)}$ é igual a 1, tem-se

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

o qual é o inverso da taxa de falha. É importante ressaltar que este resultado somente é válido para a distribuição exponencial.

- Variância:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda t} dt$$

logo

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Desvio Padrão:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = MTTF$$

Note que este resultado implica que a variabilidade do tempo de falha aumenta com a confiabilidade (maiores valores do MTTF), a qual é uma situação comumente encontrada na prática.

- Uma importante característica da distribuição exponencial é observada ao se obter a confiabilidade atingida para um tempo operacional equivalente ao MTTF:

$$R(MTTF) = e^{-\lambda\, MTTF} = e^{-MTTF/MTTF} = e^{-1}$$

$$R(MTTF) = 0.368$$

ou seja, um equipamento cujo tempo de falha segue a distribuição exponencial, possui chance um pouco melhor do que 1/3 de sobreviver até o seu MTTF!

- Quando usar ?
  - Idealmente, o período de taxa de falha constante deve dominar a vida útil do sistema. Em situações em que a taxa de falha do componente ou sistema é constante ou aproximadamente constante, pode-se usar a distribuição exponencial
  - Em situações em que um componente possui distintos comportamentos da taxa de falha ao longo do período em que o mesmo é utilizado, a distribuição exponencial tem sido usada quando a região de taxa de falha constante é dominante com relação as outras regiões da curva da banheira:
    - Componentes eletrônicos
    - Alguns componentes mecânicos
  - Análise de sistemas complexos:
    - Métodos analíticos para sistemas complexos são complicados, logo simplificações devem ser feitas. Nestes casos, a hipótese de taxa de falha constante e o uso da distribuição exponencial simplificam consideravelmente o problema
    - Dados de falha disponíveis na análise de confiabilidade de sistemas complexos são em geral limitados e insuficientes para verificar ou ajustar uma distribuição mais complexa. Assim, não é realístico

empregar uma distribuição mais complicada do que os dados disponíveis permitam!

☞ *Exemplo 11*:

Um sistema de radar possui uma taxa de falha constante de 0.00034 falha por hora de operação.

- $MTTF = 1/\lambda = 1/0.00034 = 2941h$
- $R(t) = e^{-0.00034\,t}$

Confiabilidade para operação contínua de 30 dias:

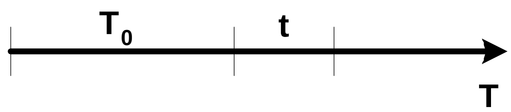
$$t = (30\ dias)(24\,h/dia) = 720\,h$$

logo,

$$R(30) = e^{-720x0.00034} = 0.783$$

O sistema de radar possui 78.3% de chances de operar durante 30 dias sem falhas.

- O Modelo Exponencial implica que um componente <u>não sofre desgaste</u>:
  - Esta é uma característica fundamental da distribuição exponencial e que acarreta em importantes implicações na prática
  - Consideremos que um determinado componente já tenha operado por um período T_0 e que nós estejamos interessados em determinar a confiabilidade em um período adicional de tempo *t* (veja ilustração)



  - Ou seja, nós estamos interessados na confiabilidade condicional deste equipamento completar uma missão *t* uma vez que o mesmo tenha estado em operação (e sem falhas) por T_0:

$$R(t|T_0) = \frac{R(T_0 + t)}{R(T_0)} = \frac{e^{-\lambda(T_0+t)}}{e^{-\lambda(T_0)}}$$

$$R(t|T_0) = \frac{e^{-\lambda T_0} e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda T_0}}$$

cancelando os termos, tem-se

$$R(t|T_0) = e^{-\lambda t}$$

☞ O tempo de falha depende somente do tamanho do intervalo de tempo de operação (t) e não do tempo operacional acumulado do equipamento (T_0).

- Esta característica da distribuição exponencial implica que:
  - Um sistema ou componente cujo tempo de falha é descrito por uma distribuição exponencial não sofre desgaste
  - Por exemplo, a probabilidade de falha (ou, inversamente, a confiabilidade) de um componente para uma missão de 30 horas dado que o mesmo se encontre em operação sem falhas por 1000 horas será idêntica à de um componente novo (assumindo que ambos seguem a distribuição exponencial com a mesma taxa de falha)
  - Assim, um componente que segue a distribuição exponencial não se lembra por quanto tempo o mesmo já operou:

☞ A distribuição exponencial não possui memória!

  - Falhas são meramente aleatórias e não relacionadas com o tempo operacional acumulado
  - Note que qualquer equipamento que sofre processos de desgaste como corrosão e fadiga (acúmulo do dano sofrido) não possuirá uma taxa de falha independente do tempo (constante) e assim o emprego da distribuição exponencial não é apropriado.

☞ *Exemplo 12*:

O tempo de operação de um determinado equipamento é distribuído exponencialmente com MTTF de 500 h. (a) Qual é a probabilidade deste equipamento operar sem falhas por 600 horas? (b) Se o mesmo tem estado em operação por 600 horas, qual é a probabilidade deste equipamento falhar dentro das próximas 100 horas de operação?

- Como o MTTF é de 500 h, a taxa de falha é

$$\lambda = \frac{1}{MTTF} = \frac{1}{500} h^{-1}$$

$$R(600) = e^{-\lambda t} = e^{-t/500}$$

$$R(600) = e^{-600/500} = 0.3012$$

- Probabilidade de completar a missão de 100 h adicionais dado que já operou por 600h:

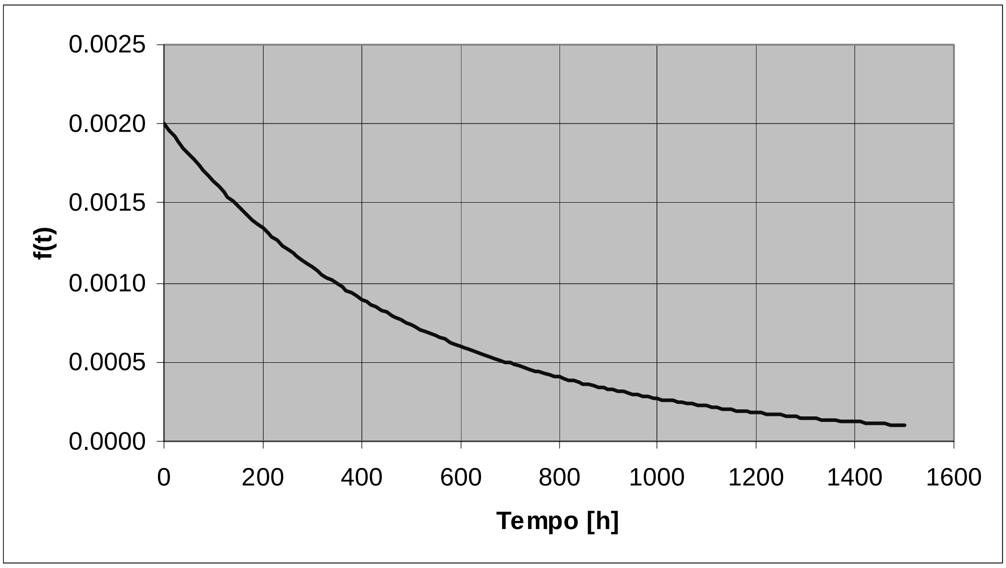
$$R(t|T_0) = \frac{R(t+T_0)}{R(T_0)} = \frac{e^{-(600+100)/500}}{e^{-600/500}}$$

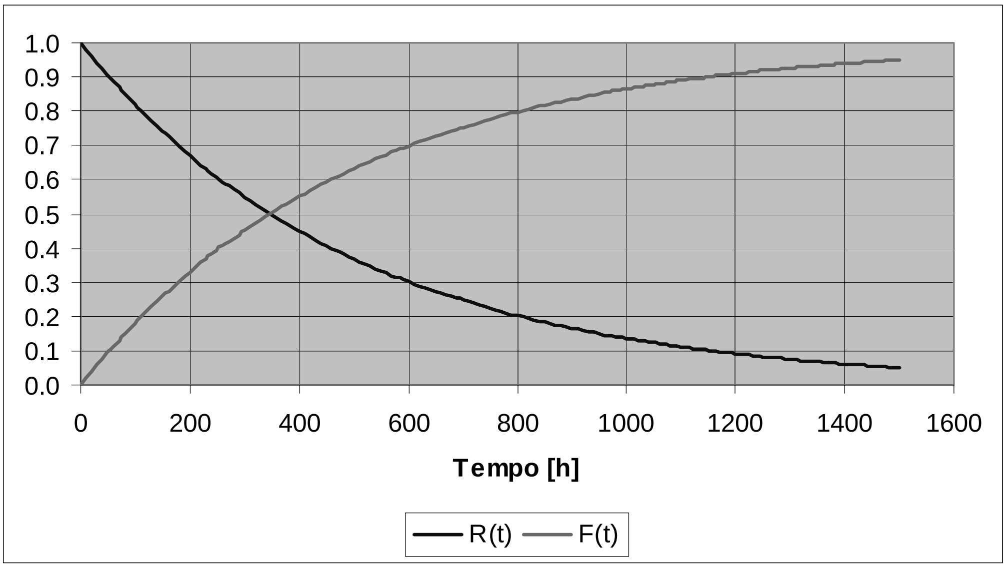
$$R(100|600) = e^{-100/500}$$

Logo, a probabilidade de falha nas próximas 100 h dado que já operou por 600h:

$$F(100|T \geq 600) = 1 - R(100|T \geq 600) = 1 - e^{-100/500} = 0.18$$

Veja os seguintes gráficos da PDF e confiabilidade/CDF deste equipamento.





Então, para a distribuição exponencial este valor não depende de quanto tempo o equipamento já tenha operado (T_0), mas somente do período de tempo adicional considerado ($t = 100h$).

14. A Distribuição de Weibull

- É uma distribuição de probabilidade flexível a qual permite descrever taxas de falha constante, crescente e decrescente, sendo uma das mais empregadas em engenharia de confiabilidade
- Caracterização:
  - Taxa de falha:

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad ; \alpha, \beta > 0,\ t \geq 0$$

onde α, β são os parâmetros da distribuição:

$\alpha \equiv$ é o parâmetro de escala ("scale parameter"), adimensional

$\beta \equiv$ é o parâmetro de forma ("shape parameter"), dimensão de tempo

- Confiabilidade:

  Como

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^{\tau} h(\tau)d\tau\right]$$

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^{\tau} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^{\beta-1} d\tau\right]$$

$$R(t) = e^{-\left(t/\alpha\right)^{\beta}}$$

- CDF:

  Sendo

$$F(t) = 1 - R(t)$$

  tem-se

$$F(t) = 1 - e^{-\left(t/\alpha\right)^{\beta}}$$

- PDF:

  Sabemos que

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

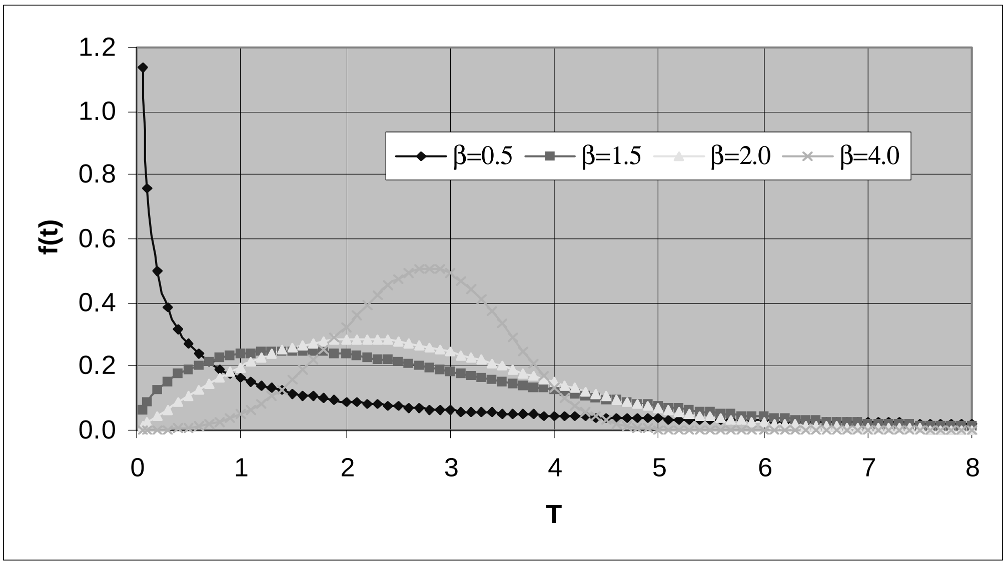
  logo

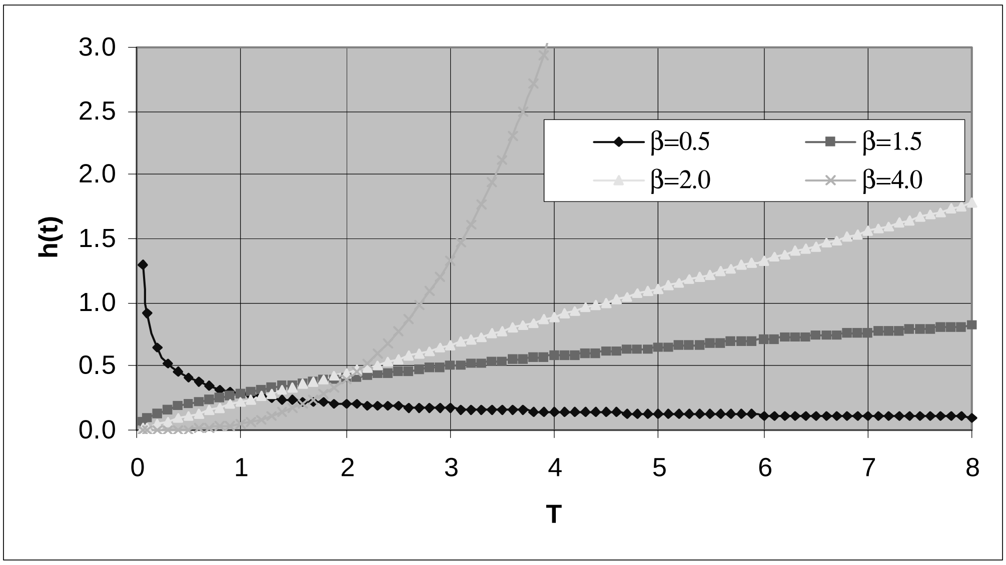
$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(t/\alpha\right)^{\beta}}$$

- Análise da influência do parâmetro de forma (β) no comportamento da distribuição de Weibull:
  - β afeta a "forma" da distribuição: visível na PDF
  - Determina o comportamento da taxa de falha *h(t)*. Veja a seguinte tabela.

Valor	Propriedade
$0 < \beta < 1$	*h(t)* decrescente
$\beta = 1$	*h(t)* constante (dist. Exponencial)
$1 < \beta < 2$	*h(t)* crescente e côncava
$\beta = 2$	*h(t)* crescente e linear (dist. Rayleigh)
$\beta > 2$	*h(t)* crescente e convexa
$3 \leq \beta \leq 4$	*h(t)* crescente e aprox. simétrica (dist. Normal)

- Observe os próximos gráficos da PDF e da taxa de falha para a distribuição de Weibull com diferentes valores do parâmetro de forma e para um mesmo valor do parâmetro de escala ($\alpha = 3$)





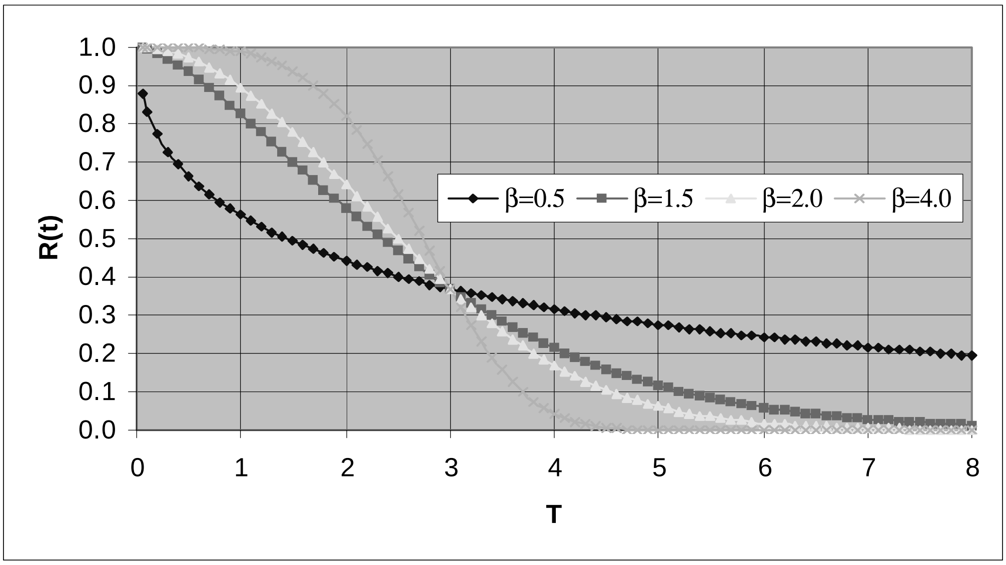
- Note que a distribuição de Weibull é bastante flexível podendo representar uma grande variedade de formatos (comportamentos) do tempo de falha de equipamentos
- Inclusive, a distribuição de Weibull pode ser utilizada para aproximar outras distribuições de probabilidade (veja tabela anterior):
  - Quando $\beta = 1$, a distribuição Exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull

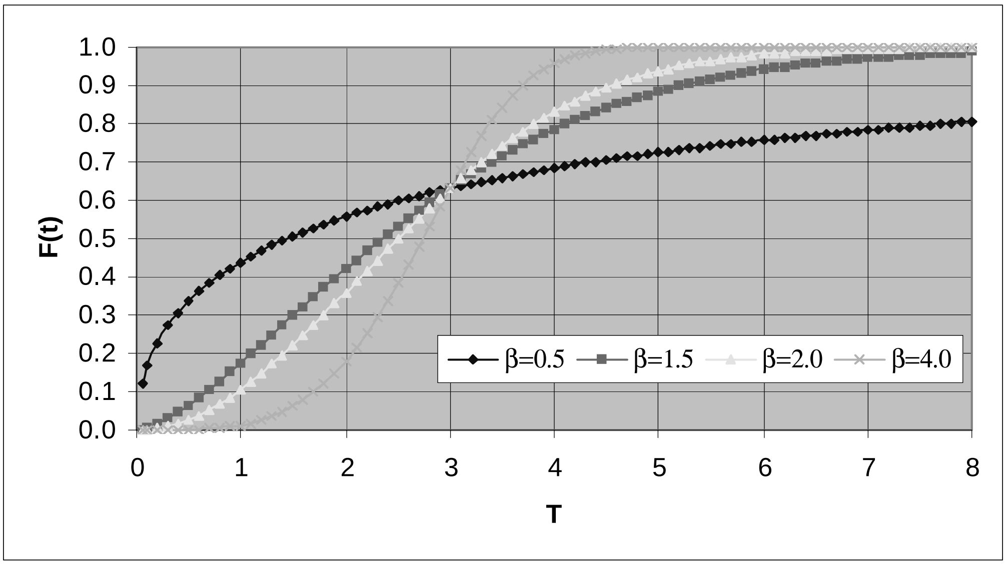
$$h(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1-1} = \frac{1}{\alpha} \equiv cte = \lambda$$

  - Quando $\beta = 2$, tem-se a distribuição de Rayleigh: um caso especial da distribuição de Weibull que é caracterizada por uma taxa de falha crescente e linear
  - Para $\beta = 2.5$, a distribuição de Weibull é aproximadamente equivalente a distribuição LogNormal. Note, porém, que a LogNormal não é um caso especial da Weibull, apenas que para este valor do parâmetro de forma, a distribuição de Weibull possui forma semelhante a da distribuição LogNormal (PDFs semelhantes)

– Para $\beta = 3.6$, a distribuição de Weibull é aproximadamente equivalente a distribuição Normal. Como antes, a distribuição Normal não é um caso especial da distribuição de Weibull.

- Note que uma taxa de falha crescente pode crescer:
  - A uma taxa decrescente (côncava) quando $1 < \beta < 2$
  - A uma taxa constante (linear) quando $\beta = 2$
  - A uma taxa crescente (convexa) quando $\beta > 2$. Em particular, taxas de falha que são convexas refletem um processo de desgaste extremamente agressivos
- É importante frisar que apesar da distribuição de Weibull ser capaz de representar todas as três fases da curva da banheira, ela o faz para distintos valores do parâmetro de forma:
  - Não existe nenhum valor do parâmetro de forma que resulte em uma taxa de falha com a forma da curva da banheira (decrescente, constante e crescente)
- Observe os seguintes gráficos da confiabilidade e da CDF para diversos valores do parâmetro de forma é um mesmo valor do parâmetro de escala ($\alpha = 3$)





- Como é esperado, quanto maior o valor do parâmetro de forma, menor será a confiabilidade para um mesmo tempo de operacional
- Analogamente, para valores mais elevados do parâmetro de forma, a probabilidade acumulada de falha, CDF, é maior para um mesmo tempo de missão

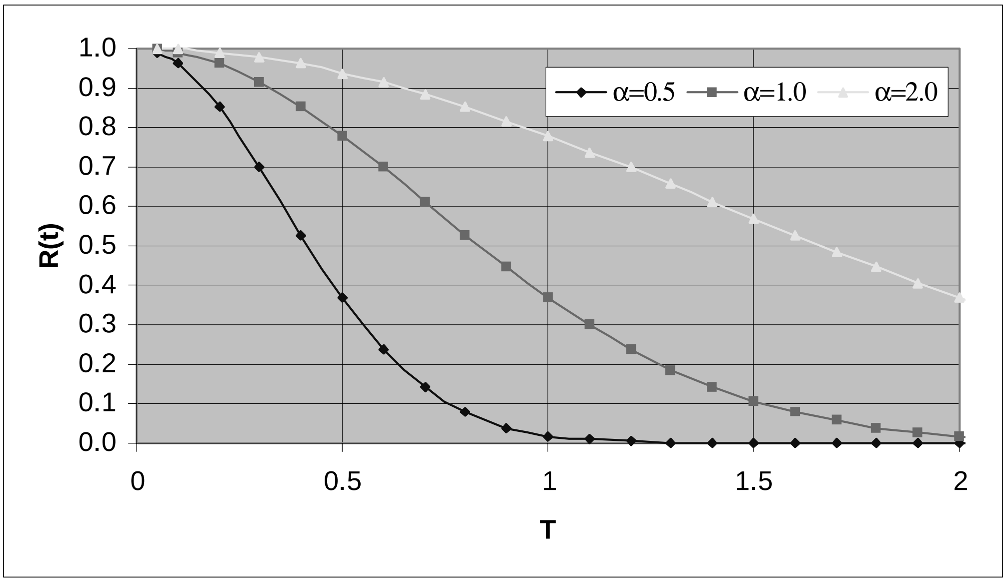
- Note nos gráficos anteriores que todas as curvas de confiabilidade e CDF passam através do mesmo ponto no qual $t = \alpha$:

$$R(T \leq \alpha) = e^{-(\alpha/\alpha)^{\beta}} = e^{-1}$$

$$R(T \leq \alpha) = 0.368$$

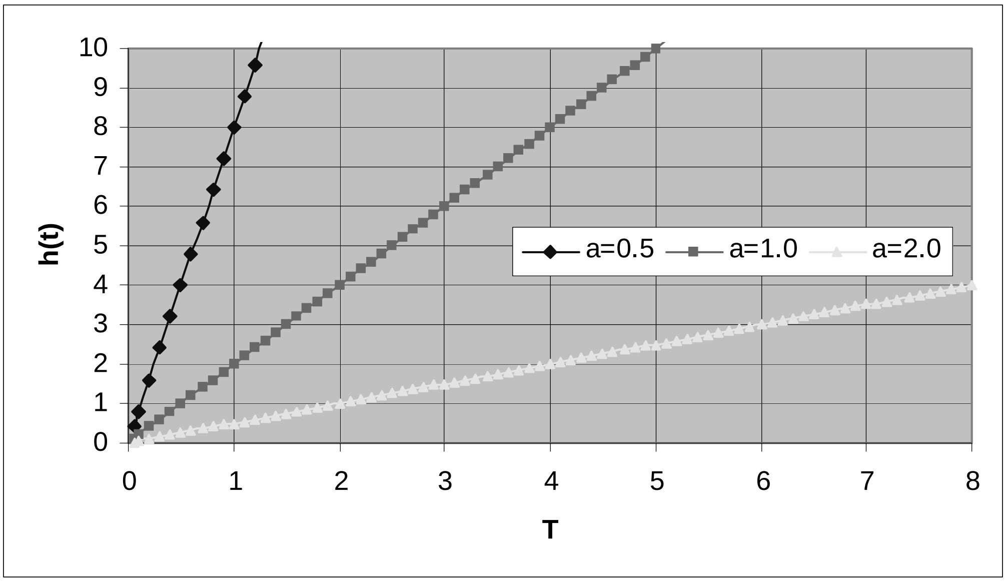
Logo, 63.2% de todas as falhas vão ocorrer ao se atingir $t = \alpha$ independentemente do valor do parâmetro de forma. Por isso, o parâmetro de escala α é também conhecido como *Vida Característica*

- Análise do impacto do parâmetro de escala (α) no comportamento da distribuição de Weibull:
  - O parâmetro de escala influencia tanto a média como a dispersão dos tempos de falha de um equipamento (observe a próxima figura)



- Neste gráfico da confiabilidade para distintos valores do parâmetro de escala e valor fixo do parâmetro de forma ($\beta = 2$), observa-se que à medida que α aumenta, a confiabilidade também aumenta para um determinado instante
- Ou seja, tem-se uma aumento na dispersão dos tempos de falha

• O coeficiente angular da taxa de falha *h(t)*diminui com o aumento do parâmetro de escala (melhoria da confiabilidade), como é observado na próxima figura



- *MTTF*:

$$MTTF = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

onde $\Gamma(x)$ é a *função gamma*:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$$

Quando *x* é um inteiro positivo:

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

- Variância:

$$\sigma^2 = \alpha^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

☞ É importante observar que diferentemente da distribuição Exponencial, para a distribuição de Weibull não há relação direta entre o *MTTF* e a taxa de falha *h(t)*

- Quando usar?
  - A flexibilidade da distribuição de Weibull a torna em um modelo apropriado para uma grande variedade de problemas encontrados na prática:
    - Análise da resistência à corrosão
    - Tempo de falha de componentes eletrônicos
  - Devido a sua capacidade de descrever taxas de falha crescentes, a distribuição de Weibull é um modelo a ser considerado quando nos deparamos com componentes/sistemas sujeitos a desgaste

---

☞ *Exemplo 13*:

(a) Qual é a confiabilidade de um sistema para um tempo operacional de 40 hrs se o tempo de falha do mesmo segue uma distribuição de Weibull com $\beta = 1.8$ e $\alpha = 115h$?

- Para t = 40 hrs,

$$R(t) = e^{-(t/115)^{1.8}}$$

Logo,

$$R(40) = e^{-(40/115)^{1.8}} = 0.86 \Rightarrow 86\%$$

(b) Qual é a taxa de falha neste instante?

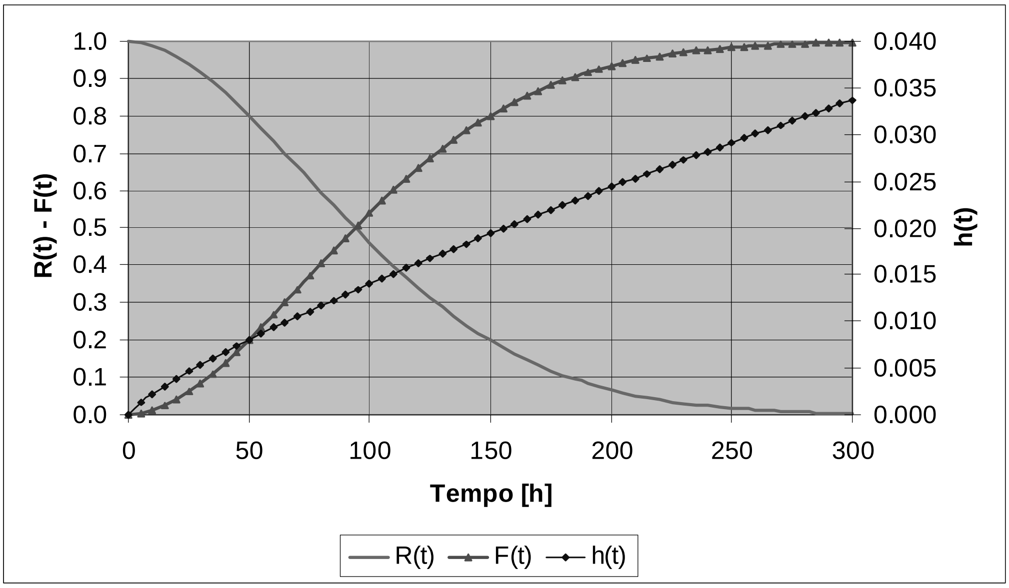
▸ Em geral,

$$h(t) = \frac{1.8}{115}\left(\frac{t}{115}\right)^{1.8-1}$$

Em t = 40hrs:

$$h(t) = \frac{1.8}{115}\left(\frac{40}{115}\right)^{0.8} = 0.0067\,h^{-1}$$

Observe no próximo gráfico o comportamento da confiabilidade, CDF e taxa de falha para este componente. Note que a taxa de falha é aproximadamente linear uma vez que $\beta = 1.8$



- Agora resolva o seguinte problema:

☞ *Exemplo 14 (Resolver)*:

Considerando que o tempo de falha de um sensor de temperatura segue uma distribuição de Weibull com $\beta = 1/3$ e $\alpha = 16000\,h$, encontre:

(a) *R(t)* e construa o gráfico R x t

(b) Tipo de comportamento da taxa de falha, construindo o gráfico h x t

(c) MTTF

(d) Variância

(e) A vida característica, ou seja, instante onde aproximadamente 63% das falhas ocorrem

(f) Tempo operacional atingido para um nível de confiabilidade de 90%

- Confiabilidade Condicional:
  - Para a distribuição de Weibull, temos

$$R(t|T_0) = \frac{\exp\left\{-\left[\left(T_0 + t\right)/\alpha\right]^{\beta}\right\}}{\exp\left\{-\left[\left(T_0\right)/\alpha\right]^{\beta}\right\}}$$

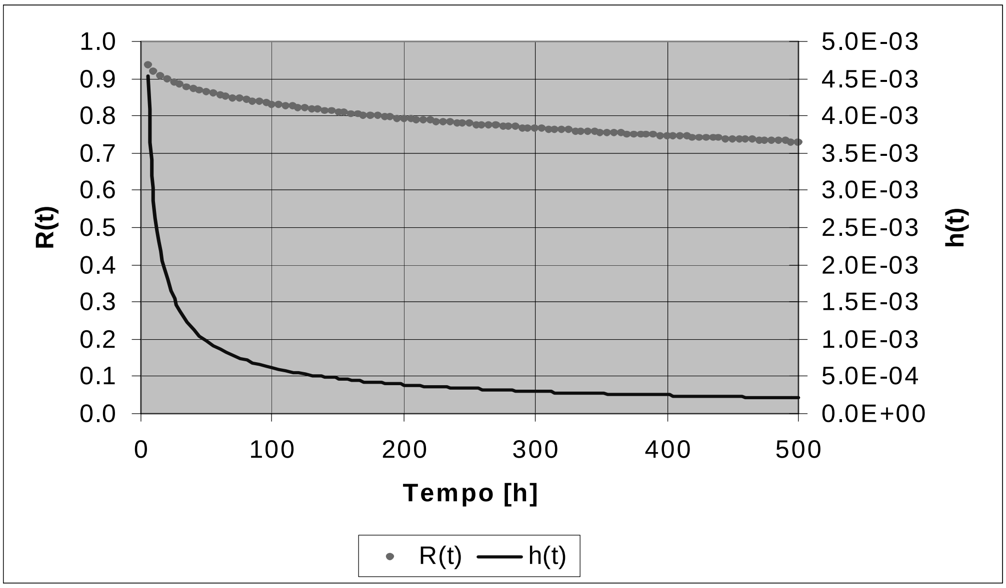
$$R(t|T_0) = \exp\left[-\left(\frac{T_0 + t}{\alpha}\right)^{\beta} + \left(\frac{T_0}{\alpha}\right)\beta\right]$$

☞ A distribuição de Weibull tem memória!

☞ *Exemplo 15*:

Se no exemplo anterior fosse usado um período de “burn-in” de 10 horas, qual seria o tempo operacional atingido para um nível de confiabilidade de 90%?

- Inicialmente, observe no seguinte gráfico como a confiabilidade e a taxa de falha se comportam em função do tempo operacional quando o sensor de temperatura não é previamente submetido ao “burn-in”



- Agora, dado um período de 10 horas de "burn-in", temos que a confiabilidade do sensor de temperatura para uma dada missão de *t* horas é:

$$R(t|10) = \exp\left[-\left(\frac{t+10}{16000}\right)^{1/3} + \left(\frac{10}{16000}\right)^{1/3}\right]$$

Para $R(t_{90}|10) = 0.90$, tem-se

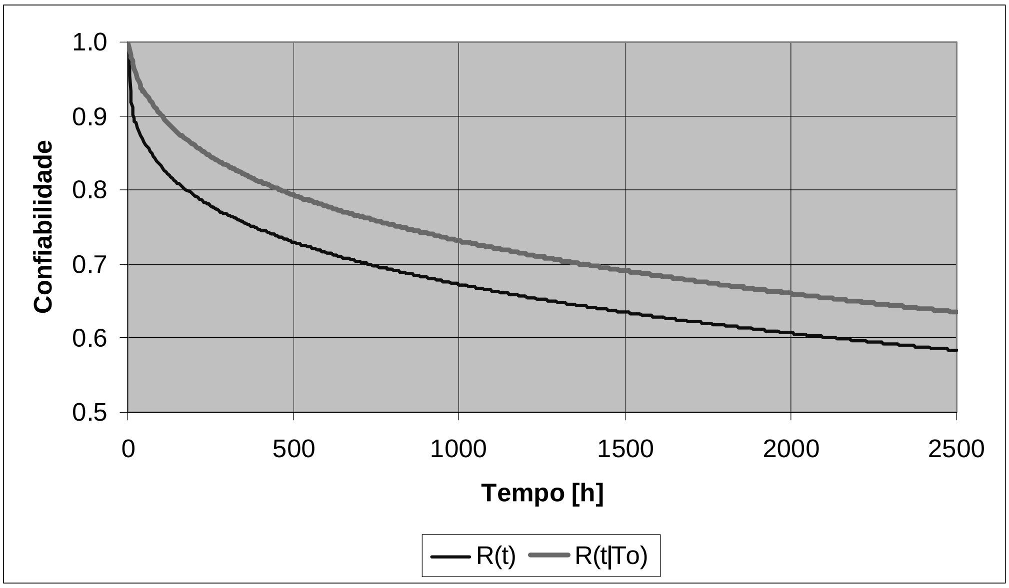
$$t_{90} = 16000\left[-Ln(0.90) + \left(\frac{10}{16000}\right)^{1/3}\right]^3 - 10$$

resultando em

$$t_{90} = 101.24\,hrs$$

O qual é um aumento significativo no tempo de operação do sensor de temperatura quando comparado com o valor anteriormente obtido de 18.7 horas (exemplo 14). Note que este resultado foi possível pois temos uma taxa de falha *h(t)* decrescente.

Observe na figura que segue o comportamento da confiabilidade para ambos os casos discutidos. Note que no caso do sensor ter passado por um período de "burn-in", temos a confiabilidade condicional $R(t|10)$.



---

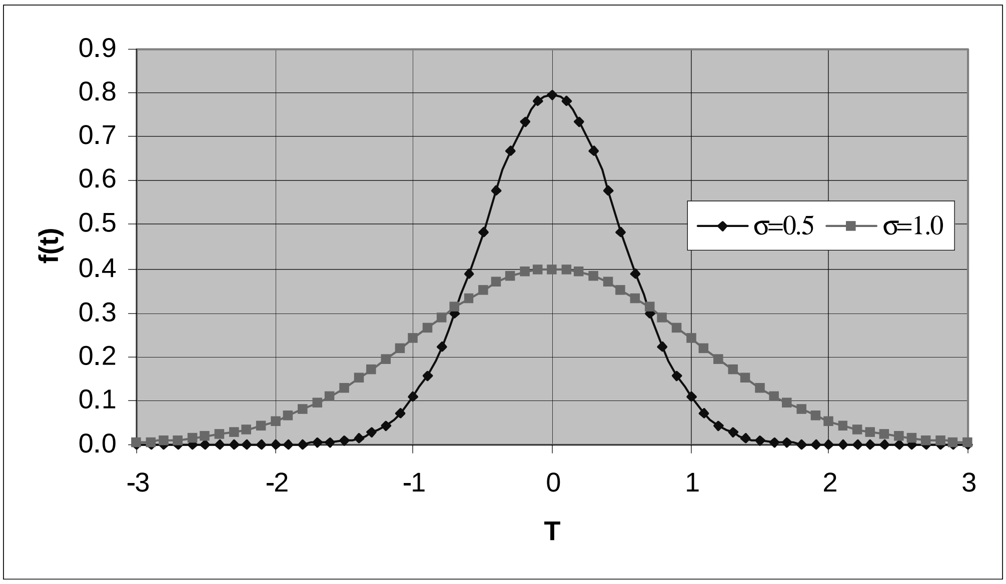
15. A Distribuição Normal

- Tem sido aplicada na modelagem de processos de fadiga e desgaste
- A função de densidade de probabilidade (PDF) é dada por:

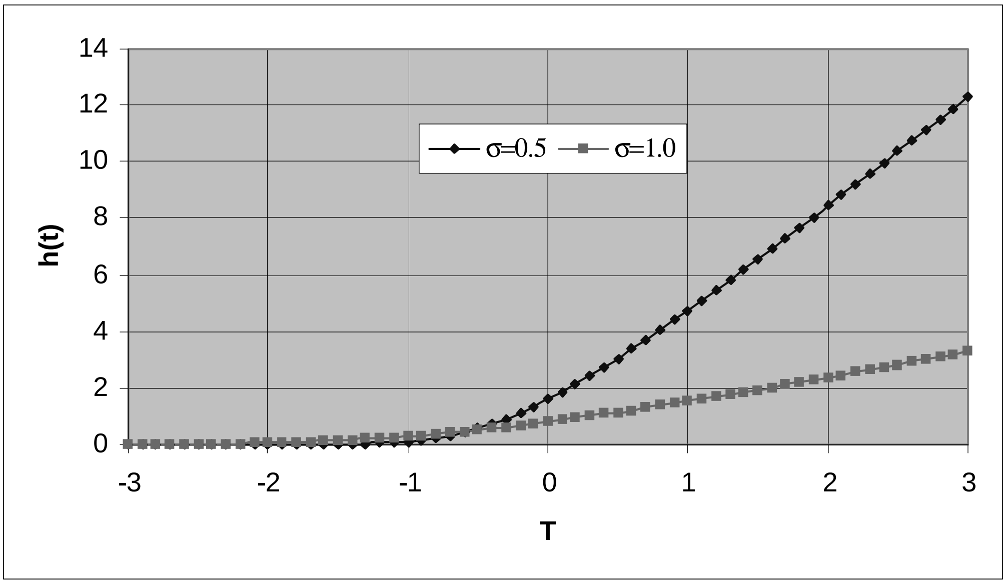
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad ; -\infty < t < \infty \,, -\infty < \mu < \infty \,, \sigma > 0$$

onde μ é a média da distribuição, σ^2 é a variância

- Uso limitado na análise de confiabilidade envolvendo tempo de falha:
  - A v.a. T pode assumir valores negativos!
  - Em alguns casos quando μ é positiva e bem maior que σ, a probabilidade de tempos negativos é desprezível
  - Observe o gráfico que segue da PDF em função do tempo de falha. Note que a distribuição Normal é simétrica com o MTTF (média), moda e mediana coincidentes



- A taxa de falha é sempre crescente com o tempo: só pode ser usada para representar a região de desgaste da curva da banheira (veja a figura que segue)



16. A Distribuição LogNormal

- Se o tempo de falha T segue a distribuição LogNormal, então o logaritmo de T tem uma distribuição Normal
- Caracterização:
  - PDF:

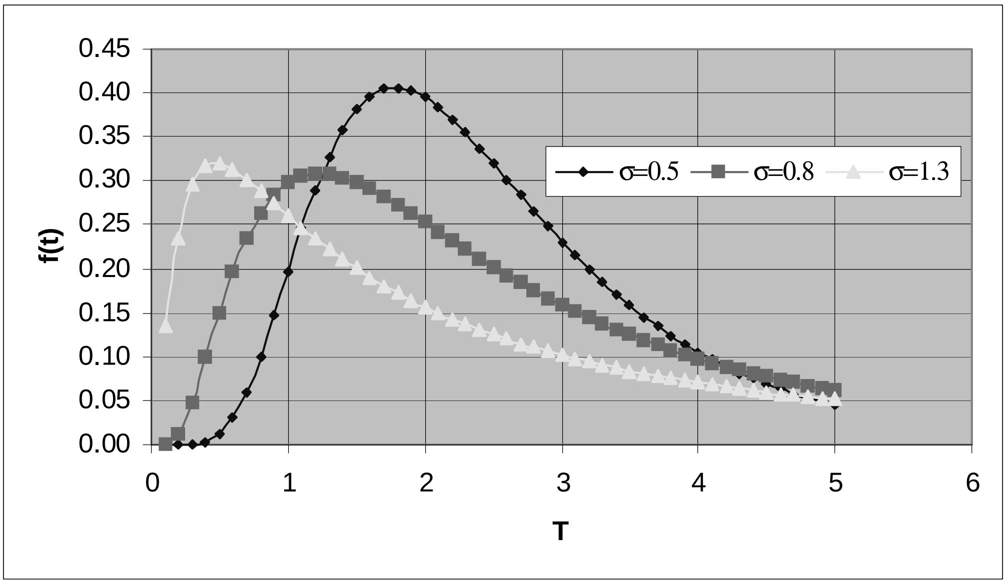
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln(t) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad ; t \geq 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

onde

$$\mu \equiv E\left[Ln(t)\right]$$

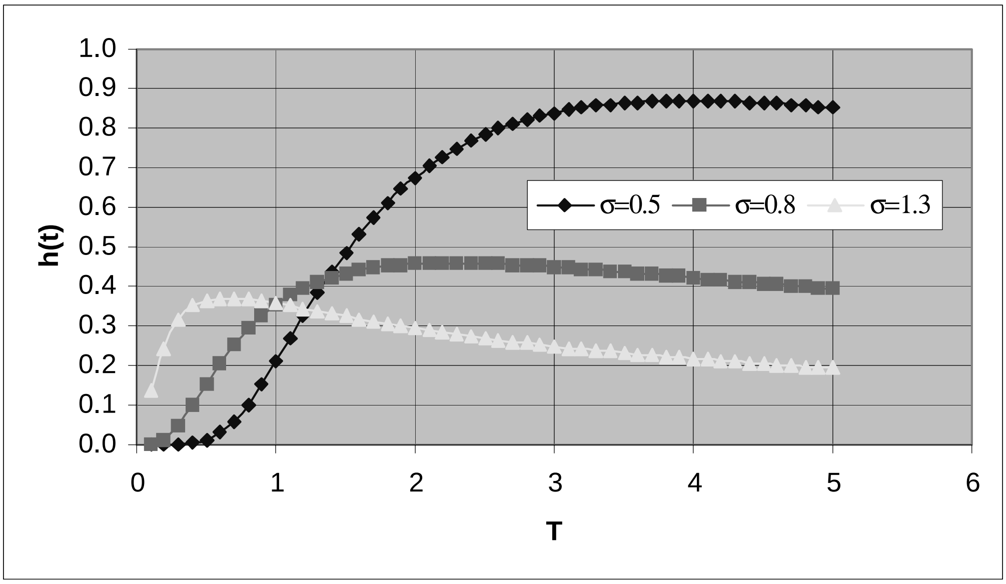
$$\sigma^2 \equiv Var\left[Ln(t)\right]$$

- Note que a distribuição LogNormal está definida apenas para valores positivos de T, logo é mais apropriada para aplicações em confiabilidade envolvendo tempo de falha do que a distribuição Normal
- Observe também que μ e σ^2 são a média e a variância do logaritmo natural do tempo de falha (Ln(t)), respectivamente, e não do tempo de falha
- Veja na figura que segue a PDF em função do tempo de falha para diversos valores de σ e média fixa $\mu = 0.8$



- Note que o formato da distribuição LogNormal é semelhante ao da distribuição de Weibull
- Na prática, freqüentemente dados de falha ajustados pela LogNormal também são bem ajustados pela Weibull

▪ Taxa de falha:
  - Como visto na próxima figura, *h(t)* inicialmente cresce para depois decrescer com o acúmulo do tempo em serviço



  - Este comportamento da taxa de falha é pouco comum na prática
  - Porém, a taxa de crescimento e decrescimento de *h(t)* depende dos valores de μ e σ. Assim, na prática,
    – A distribuição LogNormal é apropriada para o tempo de falha de componentes/sistemas cujas falhas recentes dominam o comportamento do processo de falha
    – Ou seja, a maior porção da probabilidade de falha concentra-se para valores iniciais do tempo operacional

▪ MTTF do tempo de falha:
  - Lembre que μ é a média dos logarítmos do tempo de falha e não a média de T
  - A média de T é o *MTTF* fornecido pela seguinte expressão:

$$MTTF = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$$

- Variância do tempo de falha:
  - Da mesma forma, a variância de T é

    $$Var(t) = MTTF^2\left[\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right]$$

- Caracterização da distribuição LogNormal em termos da distribuição Normal:
  - Na prática, a análise de dados de falha via a distribuição LogNormal é baseada no logaritmo natural do tempo de falha, Ln(t), e então prossegue-se a análise em termos da distribuição Normal padronizada
  - Ou seja, se T segue uma distribuição LogNormal com média μ e variância σ^2, então $Ln(T)$ segue uma distribuição Normal
    - Em particular,

      $$Z = \frac{Ln(T) - \mu}{\sigma}$$

      é distribuída de acordo com uma distribuição Normal padronizada, ou seja, com média zero e variância unitária:

      $$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

    a qual corresponde a PDF da variável Normal padronizada *Z*, e $\Phi(z)$ é a CDF obtida diretamente a partir de tabelas.
  - Assim, tendo-se μ e σ podemos facilmente encontrar a CDF, confiabilidade, e a taxa de falha de *T* a partir de valores tabelados da variável Normal padronizada *Z*:
    - CDF:

      $$F(t) = \Phi\left(\frac{Ln(t) - \mu}{\sigma}\right)$$

    - Confiabilidade:

      $$R(t) = 1 - F(t)$$

      logo,

      $$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{Ln(t) - \mu}{\sigma}\right)$$

- Taxa de falha:

  Como

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

  tem-se

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{Ln(t) - \mu}{\sigma}\right)}$$

- Quando usar?
  - A distribuição LogNormal tem sido aplicada
    - Na modelagem de mecanismos de falha devido a estresses como fadiga e corrosão
    - Modelagem do tempo de falha de componentes eletrônicos e eletromecânicos

17. Obtenção e Análise de Dados de Falha (ou Reparo)

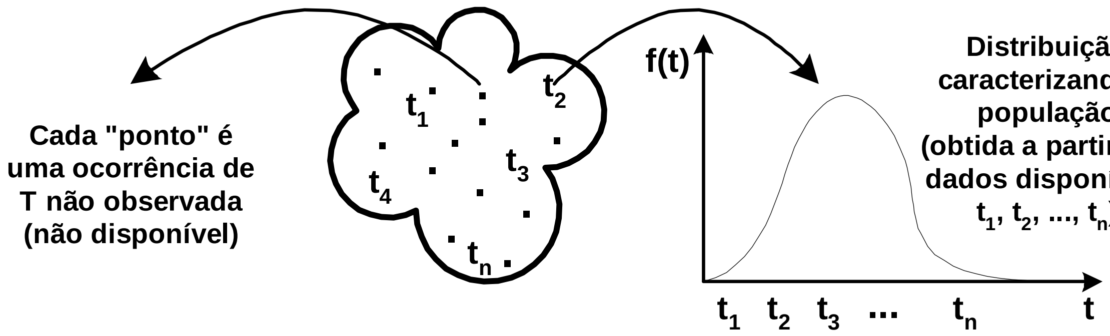
- Nesta e nas seções subseqüentes discutiremos como dados de falha podem ser usados na seleção de um modelo de probabilidade para a análise de confiabilidade de componentes e sistemas
- Os procedimentos para a escolha/ajuste de distribuições de probabilidade a dados de falha podem ser divididos em duas categorias gerais:
  - Métodos Paramétricos:
    - Consistem em ajustar uma distribuição teórica (paramétrica) como a Exponencial, Weibull, Normal, e LogNormal
  - Métodos Não-Paramétrico (ou empíricos):
    - Consistem em obter a função de confiabilidade, CDF, PDF ou taxa de falha diretamente dos dados de falha disponíveis
- Todos os procedimentos a serem discutidos são aplicáveis tanto para dados de falha como para dados de reparo, obtendo-se a distribuição do tempo de falha ou do tempo de reparo, respectivamente
- A seguir é apresentada uma breve discussão sobre modos de falha. Então, a obtenção de dados de falha e sua respectiva categorização são discutidas. Posteriormente, os métodos não paramétricos e paramétricos são abordados.

18. Modos de Falha

- Sistemas complexos sofrem falhas das mais diversas resultantes de diferentes fenômenos físicos, químicos e/ou biológicos, ou devido a distintas características de falha de seus componentes individuais
- *Mecanismos de Falha* são processos físicos, químicos e/ou biológicos através dos quais as falhas se desenvolvem
- *Modos de Falha* são os diferentes tipos de falha. Pode-se dizer que um modo de falha é uma manifestação de um ou mais mecanismos de falha
- Na engenharia de confiabilidade, costuma-se separar/distinguir as distintas falhas de acordo com o impacto destas na função desempenhada pelo componente ou sistema
- Ou seja, as falhas são categorizadas em modos de falha
- Por exemplo, uma mesma bomba pode falhar na partida ou em operação (após a partida da mesma ter sido feita com sucesso). Assim, tempos de falha correspondentes ao modo de falha "Falha da Bomba na Partida" devem ser analisados separadamente dos tempos de falha coletados para o modo de falha "Falha da Bomba em Operação"

19. Obtenção de Dados de Falha

- Os métodos de análise de dados de falha (ou reparo) discutidos neste capítulo são específicos para componentes ou sistema não reparáveis
- Os dados disponíveis correspondem a um conjunto de tempos de falha (ou reparo) representados por $t_1, t_2, \ldots, t_n$
- É assumido que cada falha t_i representa uma <u>observação independente de uma mesma população</u>
- Esta população é a distribuição de todos os possíveis tempos de falha e pode ser representada por *f(t), R(t), F(t),* ou *h(t)*
- O problema básico consiste em obter a distribuição mais apropriada do tempo de falha *T* a partir do número limitado de *n* tempos de falha contidos no conjunto de dados disponível (veja a próxima ilustração)



- De onde os dados de falha (ou reparo) são provenientes?
  - Os *n* tempos de falha podem corresponder a observações independentes de *n* componentes distintos, observando-se uma falha de cada componente (ou sistema)
  - Dados provenientes de um componente/sistema que sofre manutenção podem ser utilizados somente se após a manutenção o mesmo pode ser considerado “tão bom quanto novo”:
    - Cada tempo de falha pode ser visto como uma observação independente dos demais tempos de falha observados
    - *n* tempos de falha observados para este componente/sistema são equivalentes a colocar *n* componentes <u>novos e independentes</u> em teste
- Assim, tendo-se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ observações independentes, este conjunto de dados de falha é considerado ordenado:

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots \leq t_n$$

> ☞ Esta ordenação é conhecida como *Estatística de Ordem* e somente é adequada quando os tempos de falha são independentes e provenientes de uma mesma população

20. Organização dos Dados de Falha

- Dados de Operação x Dados de Teste:
  - *Dados de Operação* são aqueles provenientes da operação do componente em campo e refletem o uso do equipamento sob condições normais de operação

  - *Dados de Teste* correspondem a outras fontes de dados provenientes de testes de confiabilidade como "burn-in", testes acelerados, ou testes de melhoria da confiabilidade ("reliability growth")
- Dados Agrupados x Dados Não-Agrupados:
  - *Dados Agrupados* são aqueles em que os tempos de falha (ou reparo) estão distribuídos em intervalos de tempo não se tendo conhecimento dos tempos individualizados de ocorrência de cada falha. São geralmente obtidos a partir de falhas observadas em operação (campo)
  - *Dados Não-Agrupados* são aqueles em que se tem a disposição os tempos individualizados de ocorrência de cada falha
- Grandes Amostras x Pequenas Amostras:
  - Dados de campo (operação) em geral são numerosos e muitas vezes é conveniente agrupa-los em intervalos
  - Pequenas amostras (geralmente número de falhas inferior a 25) são muitas vezes resultantes de testes de confiabilidade e fornecem em geral informação mais precisa (não agrupada)
- Dados Completos x Dados Censurados:
  - *Dados Censurados* (ou suspensos) são incompletos no sentido de que pelo menos um dos componentes foi removido de observação <u>antes</u> da falha do mesmo. Assim, tem-se valores de tempo em que o componente não falhou (tempo suspenso ou censurado)
  - *Dados Completos* são formados apenas por dados de falha, ou seja, todos os componentes foram observados até falharem. Todos os tempos disponíveis correspondem a ocorrências de falhas

21. Métodos Não-Paramétricos

- O objetivo consiste em obter uma estimativa da CDF, confiabilidade, PDF, ou taxa de falha da população diretamente dos dados de falha (ou reparo) disponíveis
- Note que os métodos empíricos não fornecem informação além da faixa de dados disponível:
  - Os métodos não-paramétricos devem ser considerados como ferramentas de análise exploratória e preliminar dos dados de falha
  - A forma destas funções são geralmente usadas apenas como indicação da distribuição de probabilidade teórica mais apropriada

- <u>Métodos Não-Paramétricos para Dados Completos e Não-Agrupados</u>:
  - Considere um conjunto ordenado de n tempos de falha (ou reparo) $t_1, t_2, \ldots, t_n$ onde $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$
  - Temos que o número de componentes ainda em operação em t_i é $n - i$. Assim, uma possível estimativa da confiabilidade *R(t)* é simplesmente a fração de sobreviventes em t_i:

$$\hat{R}(t_i) = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$$

    onde o símbolo ^ é utilizado para indicar que estamos utilizando uma estimativa obtida a partir de uma amostra de dados de falha ou reparo.
  - Assim, a estimativa para a distribuição acumulativa de probabilidade (CDF) é obtida como

$$\hat{F}(t_i) = 1 - \hat{R}(t_i) = \frac{i}{n}$$

    Note que $\hat{F}(t_n) = n/n = 1$ implicando que há probabilidade zero de qualquer componente operar além do instante t_n. Como na prática é muito improvável que a nossa amostra (limitada) de dados de falha contenha o tempo máximo de operação, esta expressão tende a subestimar a real confiabilidade do componente ou sistema em questão. A seguir são apresentadas melhores estimativas para a confiabilidade e CDF as quais serão utilizadas neste capítulo.
  - Estimativas Não-Paramétricas:
    - CDF:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n+1}$$

      Note que $\hat{F}(t_n) = n/(n+1) < 1$, logo nós não estamos supondo que a nossa amostra inclui o maior tempo possível de operação.

- Confiabilidade:

  Como

$$\hat{R}(t_i) = 1 - \hat{F}(t_i) = 1 - \frac{i}{n+1}$$

temos

$$\hat{R}(t_i) = \frac{n+1-i}{n+1}$$

- PDF:

  Como $f(t) = -dR(t)/dt$, tem-se:

$$\hat{f}(t) = -\frac{\hat{R}(t_{i+1}) - \hat{R}(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)(n+1)}$$

Substituindo a expressão anterior da confiabilidade, obtemos

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)(n+1)} \ ; t_i < t < t_{i+1}$$

- Taxa de falha:

  Sabemos que $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)/\hat{R}(t)$. Substituindo as estimativas da confiabilidade e PDF obtidas anteriormente,

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{(t_{i+1} - t_{i+1})(n+1-i)} \ ; t_i < t < t_{i+1}$$

- MTTF:

  Obtido diretamente da média da amostra

$$M\hat{T}TF = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n}$$

- Variância:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n\, M\hat{T}TF^2}{n-1}$$

☞ *Exemplo 16*:

Considere os seguintes tempos de falha em horas:

24.5, 18.9, 54.7, 48.2, 20.1, 29.3, 15.4, 33.9, 72.0, 86.1

Determine R(t), F(t), f(t), h(t), e o MTTF.

- Inicialmente devemos ordenar os tempos de falha. Veja a tabela que segue:

i	T[h]	R(t)	f(t)	h(t)
0	0.0	1.0000	0.0059	0.0059
1	15.4	0.9091	0.0260	0.0286
2	18.9	0.8182	0.0758	0.0926
3	20.1	0.7273	0.0207	0.0284
4	24.5	0.6364	0.0189	0.0298
5	29.3	0.5455	0.0198	0.0362
6	33.9	0.4545	0.0064	0.0140
7	48.2	0.3636	0.0140	0.0385
8	54.7	0.2727	0.0053	0.0193
9	72.0	0.1818	0.0064	0.0355
10	86.1	0.0909		

Por exemplo,

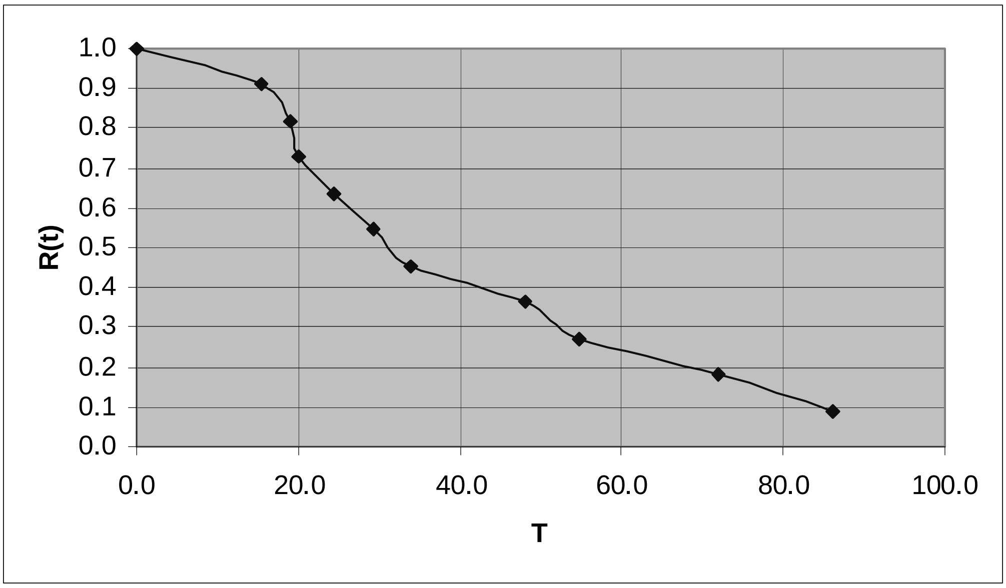
$$\hat{R}(15.4) = \frac{10+1-i}{10+1} = \frac{10+1-1}{10+1} = 0.909$$

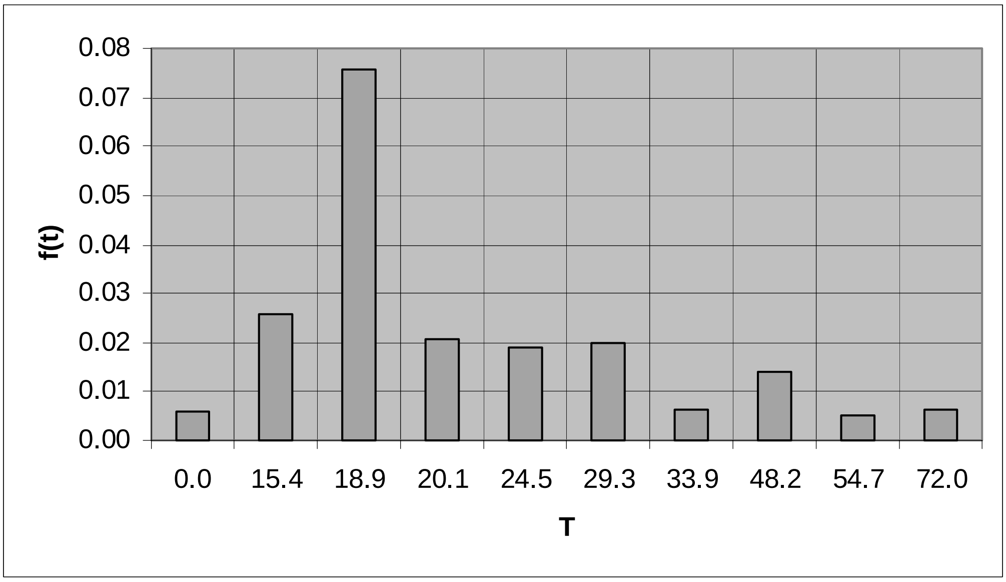
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(t_{i+1}-t_i)(10+1)} = \frac{1}{(15.4-0)(10+1)} = 0.0059 \ \ ; 0 < t < 15.4$$

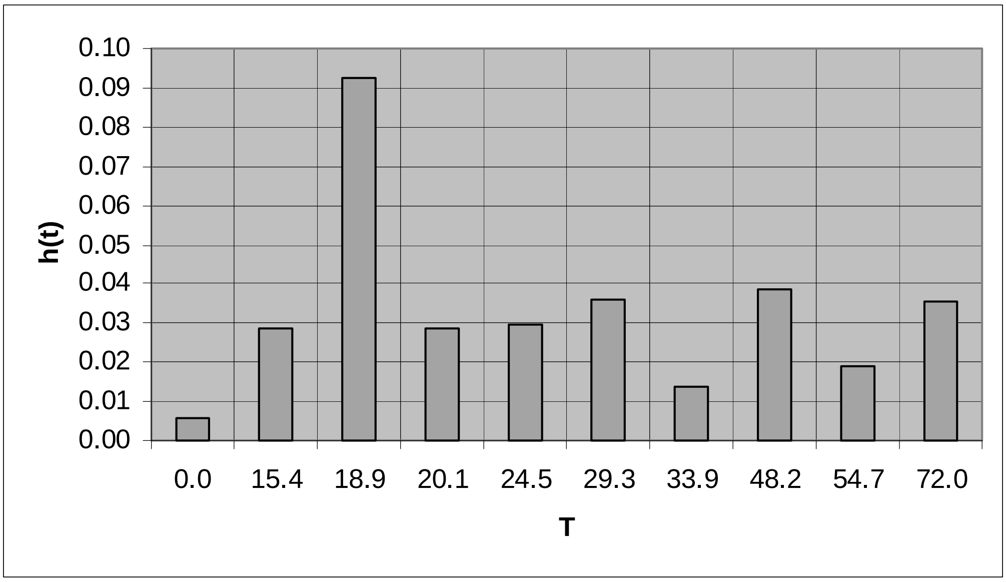
$$\hat{h}(t) = \frac{1}{(t_{i+1}-t_i)(10+1-i)} = \frac{1}{(18.9-15.4)(10+1-1)} = 0.0286 \ \ ; 15.4 < t < 18.9$$

$$M\hat{T}TF = \frac{15.4+\cdots+86.1}{10} = 40.31 hrs$$

- Veja a seguir os gráficos da confiabilidade, PDF, e da taxa de falha.


R(t)
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
20.0
40.0
60.0
80.0
100.0
T


f(t)
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.0
15.4
18.9
20.1
24.5
29.3
33.9
48.2
54.7
72.0
T


h(t)
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.0
15.4
18.9
20.1
24.5
29.3
33.9
48.2
54.7
72.0
T

- Note que a taxa de falha inicialmente aumenta para depois decrescer com o acúmulo do tempo operacional. Notadamente, entre 15.4 e 20.1 horas de operação ocorre uma queda acentuada da confiabilidade, a PDF e a taxa de falha apresentam os seus pontos máximos. Este comportamento sugere que a distribuição LogNormal é uma possível candidata para descrever este processo de falha.

- Como foi dito anteriormente, todas as expressões apresentadas nesta seção são também diretamente aplicáveis para tempos de reparo. Neste caso, o *MTTF* é substituído pelo *MTTR*, ou seja, *Tempo Médio de Reparo*. Veja o próximo exemplo.

☞ *Exemplo 17*:

Os tempos de reparo que seguem, em horas, foram observados para a manutenção de um certo tipo de trocador de calor:

5.0, 6.2, 2.3, 3.5, 2.7, 8.9, 5.4, 4.6

(a) Estime a CDF do tempo de reparo, (b) Calcule o MTTR, © Se o MTTR desejado é de 4 hrs e que 90% dos reparos sejam completados dentro de 8 hrs, os objetivos de manutenção estão sendo atingidos?

- Após ordenar os tempos de reparo fornecidos, construímos a seguinte tabela contendo as estimativas da CDF do tempo de reparo do nosso trocador de calor.

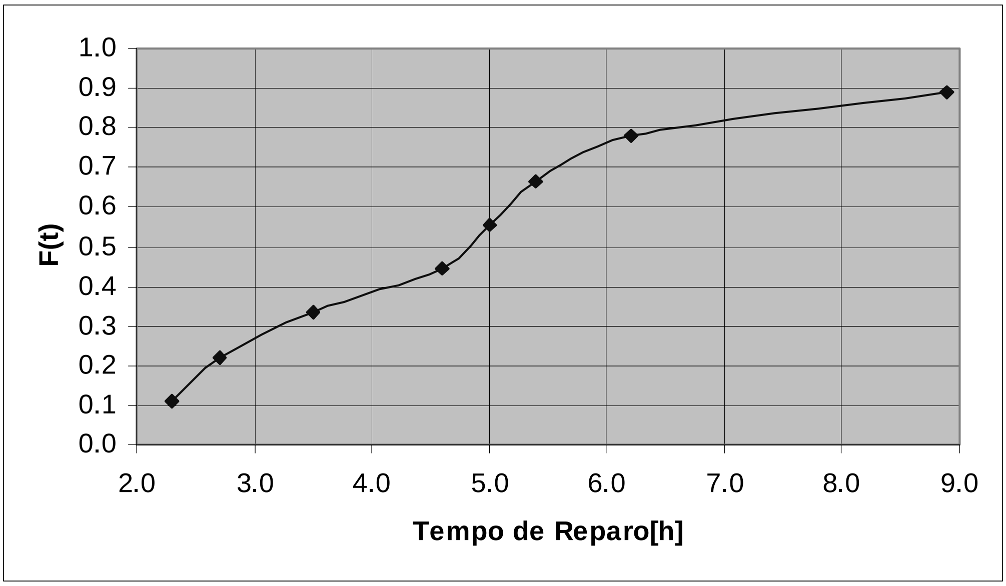
i	T[h]	F(t)
1	2.3	0.111
2	2.7	0.222
3	3.5	0.333
4	4.6	0.444
5	5.0	0.556
6	5.4	0.667
7	6.2	0.778
8	8.9	0.889

- O *MTTR* é dado por:

$$\hat{MTTR} = \frac{2.3 + \cdots + 8.9}{8} = 4.825\, hrs$$

Assim, vemos que o objetivo quanto ao *MTTR* está sendo alcançado.

- Veja na figura seguinte o comportamento da CDF do tempo de reparo.



Porém, através da análise deste gráfico, vemos que não estamos atingindo o objetivo de completar 90% dos reparos em 8 horas, pois temos que $t_{90} \approx 8.9\,hrs$!

- As estimativas não-paramétricas acima apresentadas para dados completos e não-agrupados são em geral utilizadas na prática para $n < 25$:
  - Isto porém não as invalida para amostras maiores. Apenas sugere que quando temos disponíveis um número maior de dados de falha ou reparo, em geral os mesmos são agrupados em intervalos de tempo com o intuito de facilitar a análise.
  - Muitas vezes, porém, pode ocorrer que nós simplesmente não dispomos das ocorrências individuais de cada falha, impossibilitando o procedimento apresentado. Veja o procedimento que segue.

- <u>Métodos Não-Paramétricos para Dados Completos e Agrupados</u>:
  - Dados agrupados são aqueles em que os tempos de falha (ou reparo) estão distribuídos dentro de um intervalo de tempo. Os valores individuais de cada ocorrência/observação não estão disponíveis
  - Como não dispomos das observações individuais, sejam $n_1, n_2, \cdots, n_k$ o número de componentes operacionais para os tempos ordenados $t_1, t_2, \cdots, t_k$, respectivamente

- As estimativas não-paramétricas são:
  - Confiabilidade:

    Da definição de confiabilidade, uma estimativa de *R(t)* é:

    $$\hat{R}(t_i) = \frac{n_i}{n} \;\; ; i = 1,2,\ldots,k$$

    onde *n* é o número total de componentes operacionais no início do período de observação, ou seja, para $t_0 = 0$ temos $n_0 = n$ (no início, todos os componentes estão operacionais)
  - PDF:

    Da definição de *f(t)*, tem-se:

    $$\hat{f}(t) = -\frac{\hat{R}(t_{i+1}) - \hat{R}(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)n} \;\; ; t_i < t < t_{i+1}$$

    substituindo a expressão anterior da confiabilidade,

    $$\hat{f}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_{i+1})n} \;\; ; t_i < t < t_{i+1}$$

    Note que $n_i - n_{i+1}$ corresponde ao número de componentes falhos no intervalo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Logo, $\hat{f}(t)$ é uma estimativa da probabilidade de falha por unidade de tempo, onde *f(t)* fornece uma indicação do número de falhas por unidade de tempo.
  - Taxa de falha:

    Como $\hat{h}(t) = \hat{f}(t) / \hat{R}(t)$, temos

    $$\hat{h}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)n_i} \;\; ; t_i < t < t_{i+1}$$

    Note que $(n_i - n_{i+1})/n_i$ é uma estimativa da probabilidade de falha em $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, pois n_i é o número de componentes operacionais no início do intervalo em t_i. Dividindo por Δt, tem-se uma estimativa da probabilidade de falha por unidade de tempo no intervalo Δt que é justamente uma estimativa de *h(t)*, ou seja, a probabilidade condicional de falha dos componentes que tenham operado até t_i .

- MTTF:

  Estimado tomando-se como base o ponto médio de cada intervalo de tempo. Ou seja,

$$\hat{MTTF} = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{t}_i \frac{(n_i - n_{i+1})}{n}$$

onde

$$\bar{t}_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$$

$$t_0 = 0$$

$$n_0 = n$$

- Variância:

$$S^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{t}^2 \frac{(n_i - n_{i+1})}{n} - \hat{MTTF}^2$$

▪ Deve ser notado que a qualidade das estimativas depende de Δt :
  - Se pequenos intervalos Δt são usados, em teoria obteríamos estimativas mais precisas
  - Entretanto, a contrapartida em se usar intervalos Δt reduzidos é o decremento no número de observações existentes para obter as estimativas de *R(t), f(t), h(t)* em cada intervalo de tempo Δt
  - Portanto, a escolha do tamanho de Δt requer uma criteriosa consideração destes dois aspectos

▪ Note que as estimativas não-paramétricas acima apresentadas para dados completos e agrupados também são aplicáveis para tempos de reparo. Neste caso, apenas deve-se substituir *MTTF* por *MTTR*

☞ *Exemplo 18*:

Setenta compressores foram observados em períodos de 5 meses, obtendo-se os seguintes números de falha: 3, 7, 8, 9, 13, 18, 12. Determine *R(t), f(t), h(t),* MTTF, e o Desvio Padrão.

- Inicialmente construímos a tabela que segue começando em $t = 0$ com $n = 70$:

Limite Superior [meses]	Número de Falhas	Número de Comp. Operacionais	R(t)	f(t)	h(t)
0	0	70	1.000	0.0086	0.0086
5	3	67	0.957	0.0200	0.0209
10	7	60	0.857	0.0229	0.0267
15	8	52	0.743	0.0257	0.0346
20	9	43	0.614	0.0371	0.0605
25	13	30	0.429	0.0514	0.1200
30	18	12	0.171	0.0343	0.2000
35	12	0	0.000		

Por exemplo:

$$\hat{R}(t_i) = \frac{n_i}{70}$$

logo,

$$\hat{R}(5) = \frac{67}{70} = 0.957$$

$$\hat{f}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)n} = \frac{67 - 60}{(10 - 5)70} = 0.02 \quad ; 5 < t < 10$$

$$\hat{h}(t) = \frac{n_i - n_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)n_i} = \frac{67 - 60}{(10 - 5)67} = 0.0209 \quad ; 5 < t < 10$$

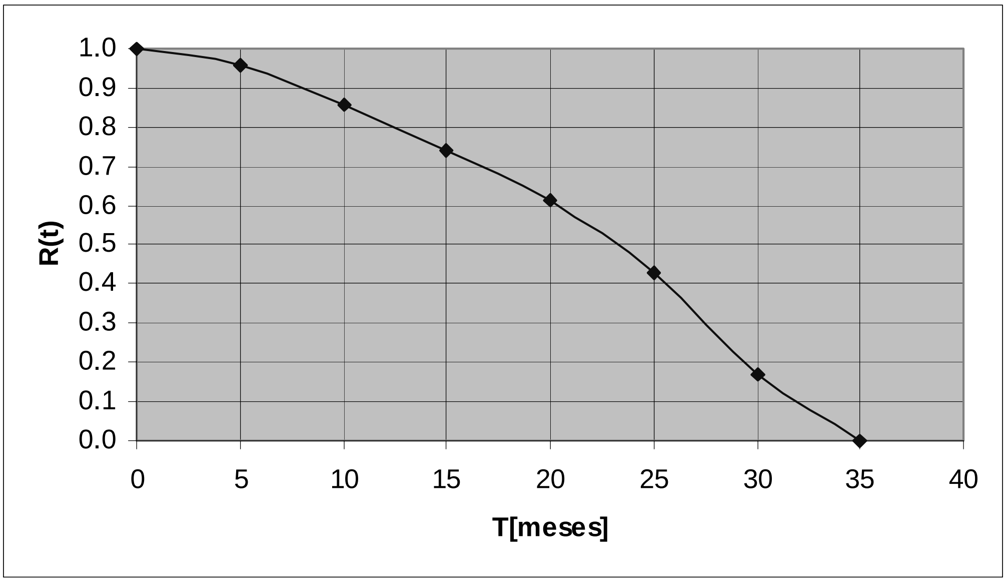
$$M\hat{T}TF = \frac{2.5(70 - 67) + \cdots + 32.5(12 - 0)}{70} = 21.357\, meses$$

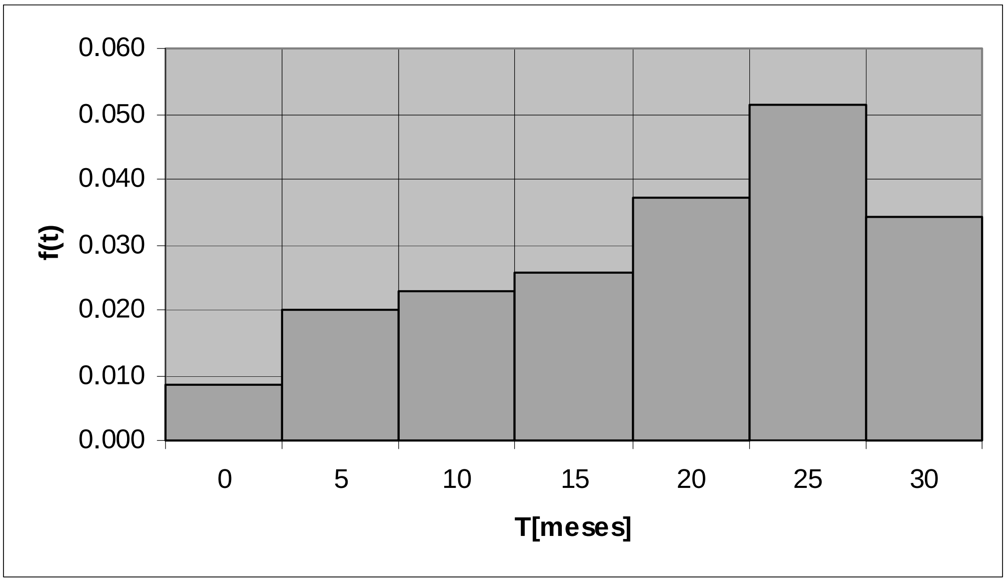
$$S^2 = \frac{2.5^2 x3 + \cdots + 32.5^2 x12}{70} - 21.357^2 = 76.551$$

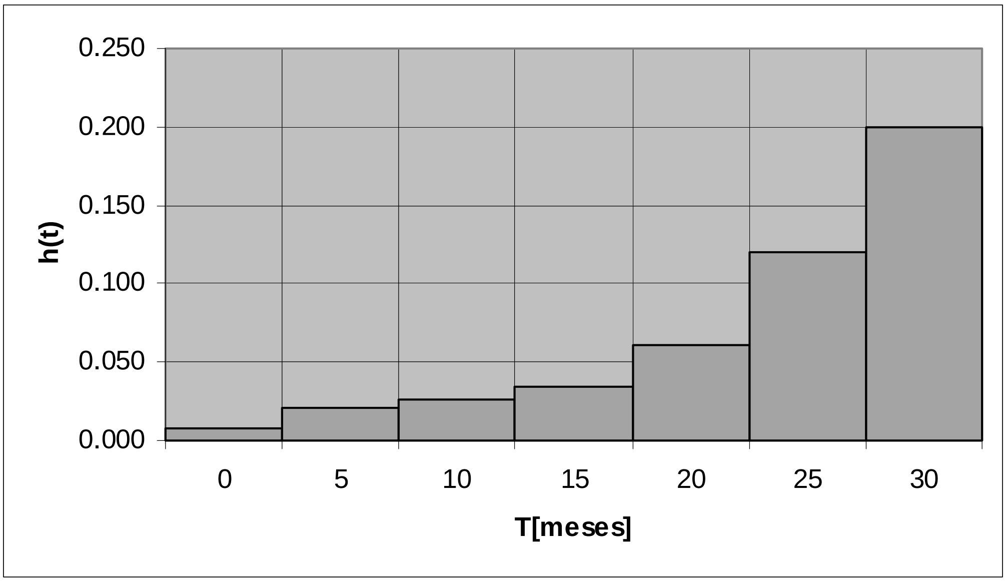
então, o desvio padrão é dado por:

$$S = 8.75\, meses$$

- Veja, a seguir, os gráficos da confiabilidade, PDF, e taxa de falha


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
R(t)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
T[meses]


0.060
0.050
0.040
0.030
0.020
0.010
0.000
f(t)
0
5
10
15
20
25
30
T[meses]


0.250
0.200
0.150
0.100
0.050
0.000
h(t)
0
5
10
15
20
25
30
T[meses]

- Note que a densidade de probabilidade é côncava enquanto que a taxa de falha é crescente. Assim, a distribuição de Weibull bem como a LogNormal são possíveis candidatadas para descrever o tempo de falha deste grupo de compressores.

22. Identificando as Distribuições de Falha e Reparo - Métodos Paramétricos

- Nesta seção discutiremos procedimentos para identificar e especificar distribuições paramétricas candidatas a descrever o processo de falha (ou reparo) baseando-nos no conjunto (limitado) de dados disponíveis
- Na seção anterior, foram desenvolvidos procedimentos para a obtenção de distribuições empíricas de confiabilidade diretamente dos dados de falha. São os métodos não-paramétricos pois não requerem que estimemos parâmetros da distribuição
- Um procedimento alternativo corresponde aos *métodos paramétricos* que consistem em utilizar os dados limitados que dispomos para obter os parâmetros de uma distribuição teórica (paramétrica) a qual julgamos ser apropriada para a descrição do processo de falha ou reparo do nosso equipamento
- Em geral, ajustar uma distribuição paramétrica é preferível a simplesmente derivar uma distribuição empírica pois:
  - Métodos empíricos não fornecem informação "sobre o que está acontecendo" além da faixa de dados que dispomos. Isto é um fator limitante na prática, pois em engenharia de confiabilidade nós geralmente estamos interessados na cauda superior (por exemplo, 95% ou 99% de confiabilidade) ou na cauda inferior (por exemplo, 0.5% ou 1% de confiabilidade) da distribuição caracterizando o processo de falha de um equipamento ou sistema
  - Nós estamos interessados em determinar a natureza probabilística do processo de falha. Uma amostra (dados disponíveis) é apenas um pequeno sub-conjunto da população dos tempos de falha, e é a distribuição a partir da qual esta amostra se originou que nos interessa e desejamos estabelecer
  - Amostras de tamanho reduzido, muito comuns na prática, fornecem informação bastante reduzida com relação ao processo de falha do equipamento. Entretanto, se esta amostra, mesmo de tamanho reduzido, é consistente com uma distribuição paramétrica, então resultados mais contundentes e de uso prático podem ser obtidos a partir das propriedades da distribuição paramétrica
- Nesta seção abordaremos o método paramétrico conhecido como *Gráficos de Probabilidade*. Porém, o mesmo será discutido dentro do contexto do processo de identificação da distribuição de falha de um equipamento ou sistema

- <u>Identificando Distribuições Candidatas</u>:
    - O processo de identificação de distribuições candidatas a descrever o tempo de falha (ou reparo) de um equipamento/sistema é tanto uma arte como ciência!
    - Compreensão do processo de falha, conhecimento das características da distribuição paramétrica e análise estatística dos dados disponíveis irão nos assistir em selecionar uma distribuição de falha ou reparo
    - O procedimento que seguiremos consistem das seguintes etapas:
        - Calcule medidas estatísticas descritivas (como MTTF da amostra)
        - Utilize propriedades de distribuições paramétricas
        - Utilize conhecimento prévio do processo de falha
        - Analise a taxa de falha empírica (métodos não-paramétricos)
        - Construa um gráfico de probabilidade (método paramétrico)
    - Medidas Estatísticas Descritivas e Propriedades de Distribuições Paramétricas:
        - Estatísticas descritivas obtidas a partir da amostra podem ser úteis tanto para auxiliar na identificação de possíveis distribuições (candidatas) como para eliminar algumas outras distribuições
        - Estas medidas em geral são analisadas em conjunto com propriedades de distribuições paramétricas
        - Por exemplo, se os dados de falha que dispomos vieram de uma distribuição simétrica ou aproximadamente simétrica, então o MTTF (ou o MTTR) e a mediana do tempo de falha obtidos a partir dos dados devem ser aproximadamente iguais
        - Neste caso então, as distribuições Normal e de Weibull com parâmetro de forma entre 3 e 4 são possíveis escolhas
        - Por outro lado, se o MTTF (ou MTTR) é consideravelmente maior do que a mediana, então os dados são substancialmente deslocados para a esquerda (não-simétricos) e distribuições como a Exponencial, LogNormal, ou Weibull serão melhores opções
        - Se o processo de falha é exponencial, então pode-se esperar que o MTTF e o desvio padrão obtidos a partir dos dados de falha deverão ser aproximadamente iguais (como é o caso da distribuição Exponencial)

☞ *Exemplo 19*:

O seguinte conjunto de tempos de falha (em horas de operação) foram obtidos do campo durante um período de 6 meses:

1476	300	98	221	157
182	499	552	1563	36
246	442	20	796	31
47	438	400	279	247
210	284	553	767	1297
214	428	597	2025	185
467	401	210	289	1024

Estime a partir da amostra: $MTTF$, a mediana, e o desvio padrão. O que se pode concluir a partir destas medidas?

- Utilizando os estimadores não-paramétricos para amostras completas e não-agrupadas, tem-se que $\hat{MTTF} = 485.2\,hrs$
- Para obtermos a mediana, devemos inicialmente ordenar os tempos de falha fornecidos. A mediana da amostra é definida como sendo igual a observação central se o tamanho da amostra é ímpar, ou igual ao ponto médio entre as duas observações centrais se o tamanho da amostra é par. Portanto, ordenando os tempos de falha:

20	31	36	47	98
157	182	185	210	210
214	221	246	247	279
284	289	**300**	400	401
428	438	442	467	499
552	553	597	767	796
1024	1297	1467	1563	2025

Como $n = 35$, temos que $\hat{t}_{med} = t_{18} = 300\,hrs$. Uma vez que

$\hat{MTTF} > \hat{t}_{med}$, nos parece que os dados de falha são deslocados (distribuição não-simétrica e deslocada para a esquerda)

- A variância é obtida como sendo $S^2 = 220712.3$, logo o desvio padrão é $S = 469.8\,hrs$
- Uma vez que o MTTF e o desvio padrão obtidos a partir da amostra estão próximos um do outro, pode-se considerar a distribuição Exponencial como uma possível candidata para descrever o processo de falha do equipamento em questão

---

- Análise da Taxa de Falha Empírica:
  - Como o próximo passo, é bastante útil calcular e construir o gráfico da taxa de falha não-paramétrica
  - A partir deste gráfico, pode ser possível determinar quando a taxa de falha é decrescente, crescente ou constante
  - Observando-se uma taxa de falha constante, temos indicação de que a distribuição Exponencial deve ser considerada como alternativa plausível
  - Uma taxa de falha decrescente fortalece a hipótese de se usar a distribuição de Weibull
  - Uma taxa de falha crescente indica que o processo de falha pode ser descrito pelas distribuições de Weibull, Normal, ou LogNormal

---

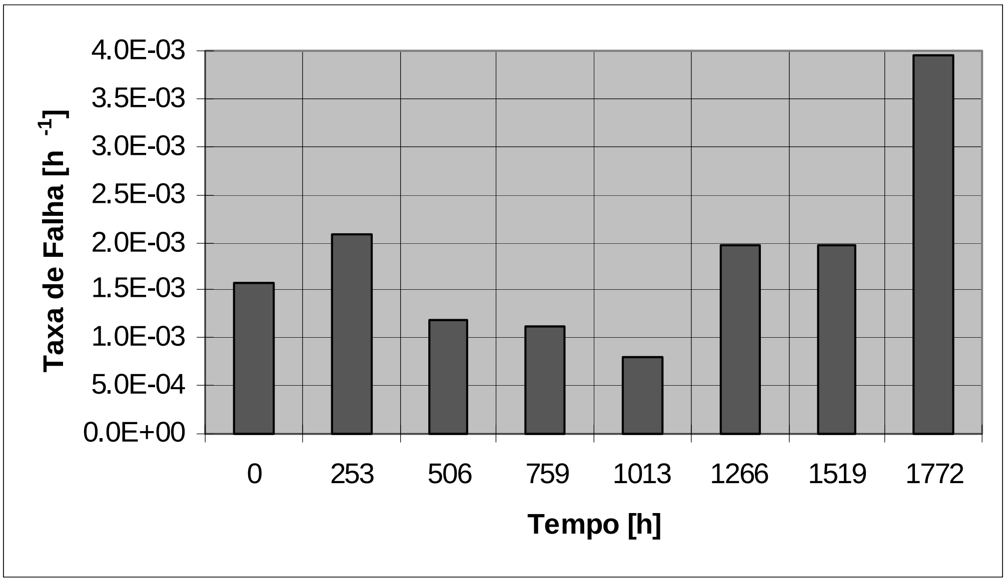
☞ *Exemplo 20*:

Para os dados do exemplo anterior, estime e construa o gráfico da taxa de falha empírica. Quais são as suas conclusões?

- Devido ao número razoável de falhas ($n = 35$), vamos estimar a taxa de falha utilizando o estimador não-paramétrico para dados completos e agrupados. Assim, os tempos de falha ordenados do exemplo 19 são agrupados em intervalos resultando na seguinte tabela:

Limite Superior (horas)	Número de Falhas	Número de Sobreviventes	Taxa de Falha
0	0	35	1.6E-03
253	14	21	2.1E-03
506	11	10	1.2E-03
759	3	7	1.1E-03
1013	2	5	7.9E-04
1266	1	4	2.0E-03
1519	2	2	2.0E-03
1772	1	1	4.0E-03
2025	1	0	

- O gráfico da taxa de falha empírica é mostrado seguir:



- Uma vez que a taxa de falha empírica não é monotônica, nós não podemos ainda descartar a possibilidade de taxa de falha constante.

- <u>Gráficos de Probabilidade - Método Paramétrico</u>:
  - Fornecem uma forma fácil e simples de avaliar se uma determinada distribuição paramétrica de probabilidade representa "um bom" ajuste para o conjunto de dados de falha ou reparo disponíveis
  - Os pares $(t_i, \hat{F}(t_i))$, $i = 1,2,\ldots,n$, são traçados em um gráfico de probabilidade específico para cada tipo de distribuição de probabilidade:
    - O eixo das ordenadas e possivelmente também o eixo das abcissas são transformados (modificados) de tal forma que se os dados são

provenientes desta distribuição, então o gráfico resultante é aproximadamente uma linha reta

- Note que no eixo das ordenadas colocamos as estimativas não paramétricas da CDF, ou seja, $\hat{F}(t_i)$
- Esta estimativa pode ser qualquer uma das discutidas na seção anterior. Porém, nós utilizaremos a seguinte estimativa:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$$

a qual é baseada na mediana. Esta aproximação será usada pois a distribuição $\hat{F}(t_i)$ é muitas vezes não-simétrica para valores de *i* próximos de zero e próximos de *n*.

- A partir de um gráfico de probabilidade:
  - Podemos obter estimativas dos parâmetros da distribuição
  - Podemos utilizar não só dados completos como também censurados. Neste caso, apenas traçamos a distribuição acumulada até o último tempo de falha disponível
- Existem duas alternativas para o método de gráficos de probabilidade:
  - Procedimento baseado em regressão linear
  - Procedimento que utiliza papéis de probabilidade

- Procedimento Baseado na Utilização de Regressão Linear:
  - Efetuamos uma *regressão linear* da forma $y = a + bx$ de um conjunto de dados transformados
  - Os *dados transformados* são obtidos a partir da transformação dos tempos de falha (ou reparo) $t_1, t_2, \dots, t_n$
  - O tipo de transformação depende do tipo de distribuição considerada como veremos a seguir
  - Esta transformação é feita de tal forma que o gráfico resultante será a uma linha reta caso os dados sejam provenientes da distribuição paramétrica considerada, e a regressão linear resultante terá um elevado valor do coeficiente r^2

- Regressão Linear: uma breve revisão
  - Considere que tenhamos n pares de observações $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, onde Y é a variável dependente e X é a variável independente
  - As equações da regressão linear para a estimativas dos coeficientes a e b são:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

onde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

  - O *coeficiente de determinação,* r^2, é dado por:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2}$$

o qual mede a qualidade do ajuste da regressão linear. Possui um valor entre zero e 1 de tal forma que quando $r^2 = 1$ temos um ajuste perfeito

- Procedimento Baseado em Papéis de Probabilidade:
    - *Papéis de Probabilidade* são papéis nos quais o eixo das ordenadas e possivelmente o eixo das abcissas já incorporam as transformações adequadas a depender do tipo de distribuição de probabilidade
    - Por exemplo, no papel de probabilidade para a distribuição Exponencial, o eixo das ordenadas está na escala logarítmica representando a transformação $\hat{F}(t) \leftrightarrow \ln\left[1 \big/ (1 - \hat{F}(t))\right]$
    - Logo, existem papéis de probabilidade específicos para cada tipo de distribuição considerada
    - A vantagem dos papéis de probabilidade é apenas que não é necessária realizar a transformação (ou transformações) da CDF, uma vez que os eixos já estão nas escalas apropriadas (transformados)
    - Geralmente, porém, o procedimento baseado na regressão linear é preferível e recomendado com relação a traçar manualmente os dados de falha em papéis de probabilidade pois:
        - É mais preciso e menos subjetivo do que ajustar um linha reta aos dados “no olho”
        - Permite determinar a qualidade do ajuste através do índice de ajuste, ou seja, verificar se os dados disponíveis são realmente provenientes da distribuição considerada
        - Devido a abundância de planilhas de cálculo e programas de estatística, grafar os dados de falha manualmente não é geralmente necessário
    - Entretanto, devido a popularidade dos papéis de probabilidade e pelo fato de que o engenheiro ainda pode se deparar com este método no seu dia a dia (nunca se sabe!), iremos fornecer estes papéis de probabilidade para as distribuições Exponencial e Weibull

- Gráficos de Probabilidade para a Distribuição Exponencial:
    - A CDF para a distribuição Exponencial é $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, ou $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados, tem-se

$$-\ln[1-F(t)] = \ln\left[\frac{1}{1-F(t)}\right] = \lambda t$$

- Tendo-se $(t_i, \hat{F}(t_i))$, onde $\hat{F}(t_i)$ é obtido da estimativa não-paramétrica baseada na mediana, devemos traçar os pares

$$\left(t_i, \ln\left[\frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}\right]\right)$$

- Note que o eixo das ordenadas é baseado na transformação

$$\hat{F}(t_i) \leftrightarrow \ln\left[\frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}\right]$$

- Como $F(MTTF) = 1 - e^{-1} = 0.632$, o *MTTF* da distribuição pode ser estimado diretamente do gráfico encontrando o valor de *t* que corresponde a $F(t) = 0.632$
- Procedimento baseado na regressão linear (distribuição Exponencial):
  - Efetuamos a regressão linear lembrando que para a distribuição Exponencial tem-se:

$$x_i = t_i$$

$$y_i = \ln\left[\frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}\right]$$

  sendo que $\hat{\lambda} = \hat{b}$ e a estimativa do *MTTF* é $1/\hat{\lambda}$

☞ *Exemplo 21*:

A partir dos seguintes tempos de falha (em horas) obtidos em um programa de teste,

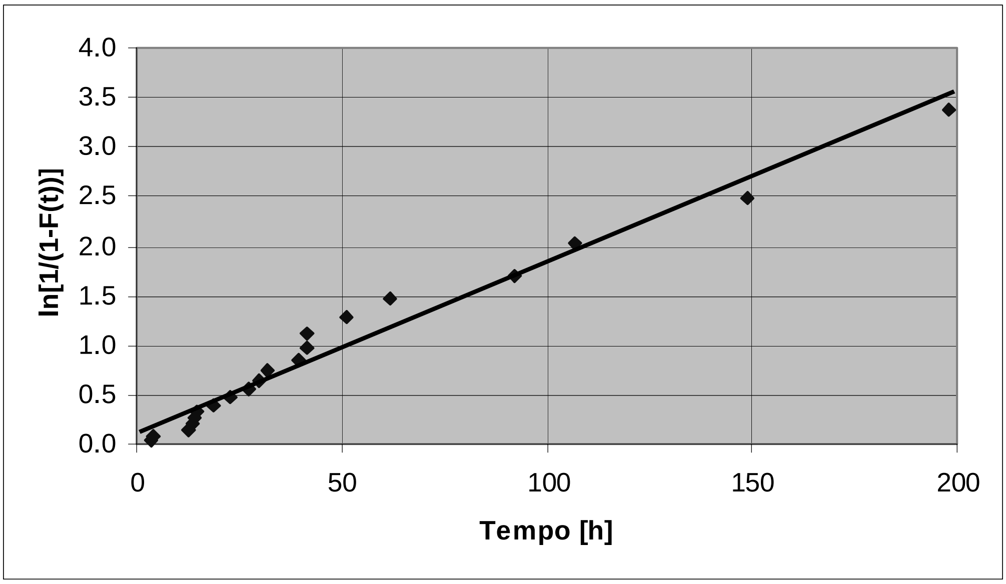
3.3, 4.2, 12.9, 13.8, 14.3, 14.8, 18.5, 22.8, 27.1, 29.7, 32.0, 39.5,
41.3, 41.6, 51.1, 61.7, 92.2, 106.6, 148.8, 198.1

construa o gráfico de probabilidade assim como a regressão linear destes dados.

- Inicialmente determinamos as estimativas $\hat{F}(t_i)$ e as respectivas transformações y_i obtendo a seguinte tabela:

Tempo de Falha, t_i	**$F(t_i)$**	**y_i**
3.3	0.03431	0.03492
4.2	0.08333	0.08701
12.9	0.13235	0.14197
13.8	0.18137	0.20013
14.3	0.23039	0.26187
14.8	0.27941	0.32769
18.5	0.32843	0.39814
22.8	0.37745	0.47393
27.1	0.42647	0.55595
29.7	0.47549	0.64529
32.0	0.52451	0.74341
39.5	0.57353	0.85221
41.3	0.62255	0.97431
41.6	0.67157	1.11343
51.1	0.72059	1.27507
61.7	0.76961	1.46797
92.2	0.81863	1.70720
106.6	0.86765	2.02228
148.8	0.91667	2.48491
198.1	0.96569	3.37221

- O gráfico de $\ln\left[1/\left(1-\hat{F}(t_i)\right)\right]$ versus t_i é mostrado a seguir, o qual evidencia a existência de uma relação linear

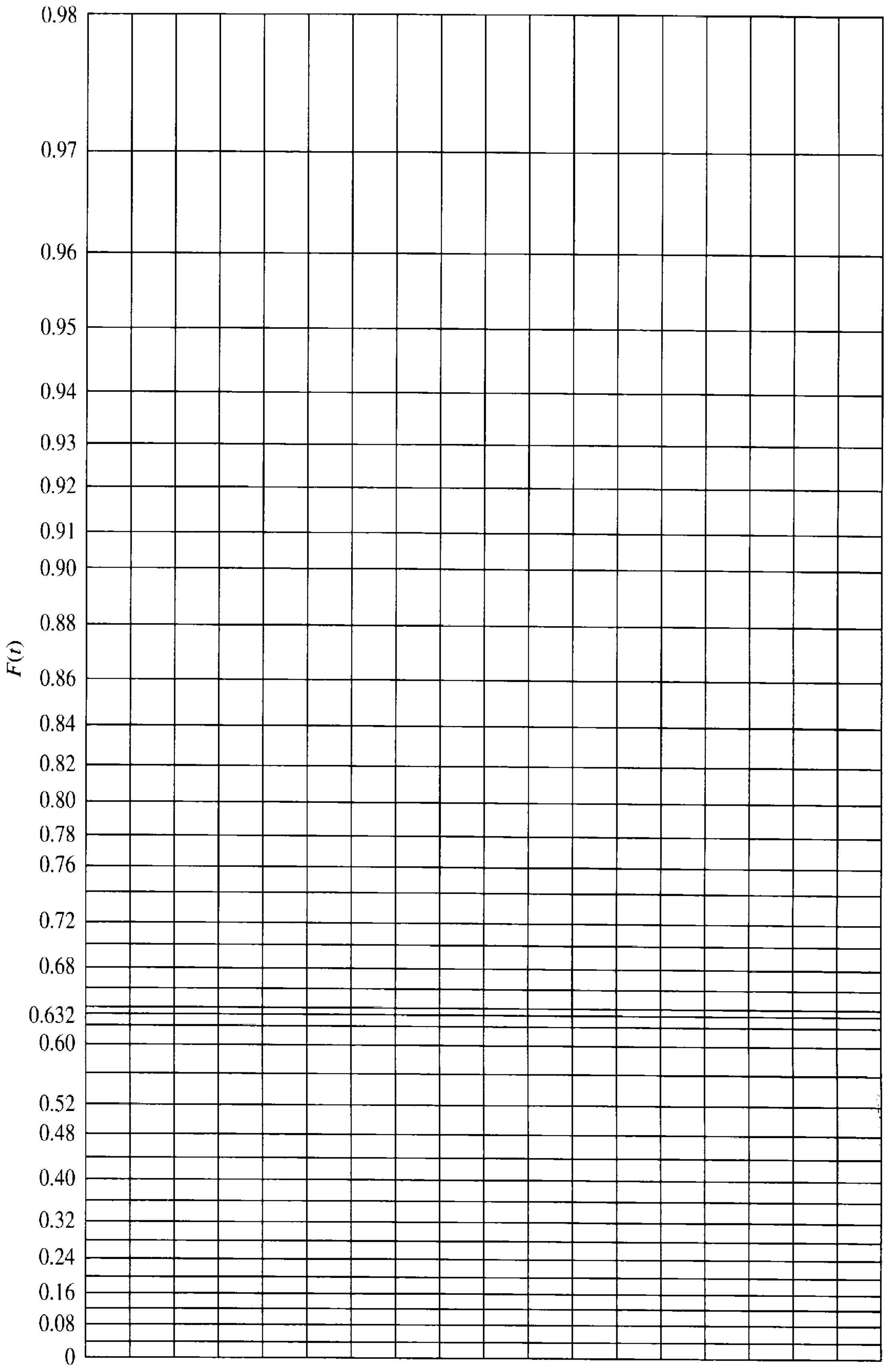


- Mais precisamente, a regressão linear dos dados de falha fornecidos fornece a seguinte estimativa da taxa de falha: $\hat{\lambda} = 0.01705$
- O coeficiente de determinação obtido é $r^2 = 0.97013$ indicando uma forte relação linear, assim dando sustentação a nossa suposição de que os dados de falha são provenientes de uma distribuição Exponencial
- O *MTTF* estimado é: $\hat{MTTF} = 1/\hat{\lambda} = 58.652\,hrs$

- Procedimento baseado em papel de probabilidade (distribuição Exponencial):
  - O papel de probabilidade para a distribuição Exponencial é construído de tal forma que se os dados em mão são provenientes de uma desta distribuição, então o gráfico resultante será aproximadamente uma linha reta
  - O eixo das abcissas é linear e devemos colocar os tempos de falha t_i
  - O eixo das ordenadas está em escala logarítmica e apesar de devermos traçar diretamente as estimativas $\hat{F}(t_i)$, o mesmo é transformado baseado na transformação que segue:

    $$\hat{F}(t) \leftrightarrow \ln\left[1/(1-\hat{F}(t))\right]$$

  - O *MTTF* pode ser obtido diretamente do gráfico a partir do ponto na linha ajustada que corresponde a 63.2%. Em geral, papéis de probabilidade para a distribuição Exponencial já possuem esta linha identificada
  - O papel de probabilidade para a distribuição Exponencial é mostrado a seguir:


0.98
0.97
0.96
0.95
0.94
0.93
0.92
0.91
0.90
0.88
F(t)
0.86
0.84
0.82
0.80
0.78
0.76
0.72
0.68
0.632
0.60
0.52
0.48
0.40
0.32
0.24
0.16
0.08
0

- Gráficos de Probabilidade para a Distribuição de Weibull:
  - A partir da função de densidade acumulativa (CDF) de Weibull

    $$F(t) = 1 - e^{-(t/\alpha)^{\beta}}$$

    tomamos o logaritmo natural e obtemos

    $$\ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right] = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}$$

    Passando novamente o logaritmo natural, tem-se

    $$\ln\ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right] = \beta \ln t - \beta \ln \alpha$$

    Portanto, devemos grafar os pares ordenados

    $$\left(\ln t_i, \ln\ln\left[\frac{1}{1 - \hat{F}(t_i)}\right]\right)$$

    ou simplesmente traçar $(t_i, \hat{F}(t_i))$ em papel de probabilidade para a distribuição de Weibull
  - Procedimento baseado na regressão linear (distribuição de Weibull):
    - Para a distribuição de Weibull, devemos aplicar as equações da regressão linear lembrando que:

      $$x_i = \ln t_i$$

      $$y_i = \ln\ln\left[\frac{1}{1 - \hat{F}(t_i)}\right]$$

    - Observando a equação linearizada para a distribuição de Weibull, temos que o parâmetro de forma β corresponde ao coeficiente angular e que $a = -\beta \ln \alpha$ é o ponto de intercepção da reta com o eixo das ordenadas

- Logo, a partir da regressão linear:
  - Estimativa do parâmetro de forma é dada por $\hat{\beta} = b$
  - Estimativa do parâmetro de escala é obtida a partir de $a = -\hat{\beta}\ln\hat{\alpha}$ e resolvendo para $\hat{\alpha}$ obtemos $\hat{\alpha} = e^{-a/\hat{\beta}}$

☞ *Exemplo 22*:

Os seguintes tempos de falha (em horas) foram obtidos a partir de 5 unidades que foram testadas até todas falharem (dados completos). Estime os parâmetros da distribuição de Weibull utilizando gráfico de probabilidade baseado na regressão linear construindo a respectiva figura.

90, 74, 32, 120, 51

- Inicialmente obtemos as transformações dos tempos de falha ordenados (estatística de ordem) mostrados na tabela a seguir:

Tempo de Falha [h]	$\ln t_i$	$F(t_i)$	$\ln\ln[1/(1-F(t_i))]$
32	3.4657	0.1296	-1.9745
51	3.9318	0.3148	-0.9727
74	4.3041	0.5000	-0.3665
90	4.4998	0.6852	0.1448
120	4.7875	0.8704	0.7145

- Os resultados da regressão linear dos dados transformados e mostrados na tabela acima são os seguintes:

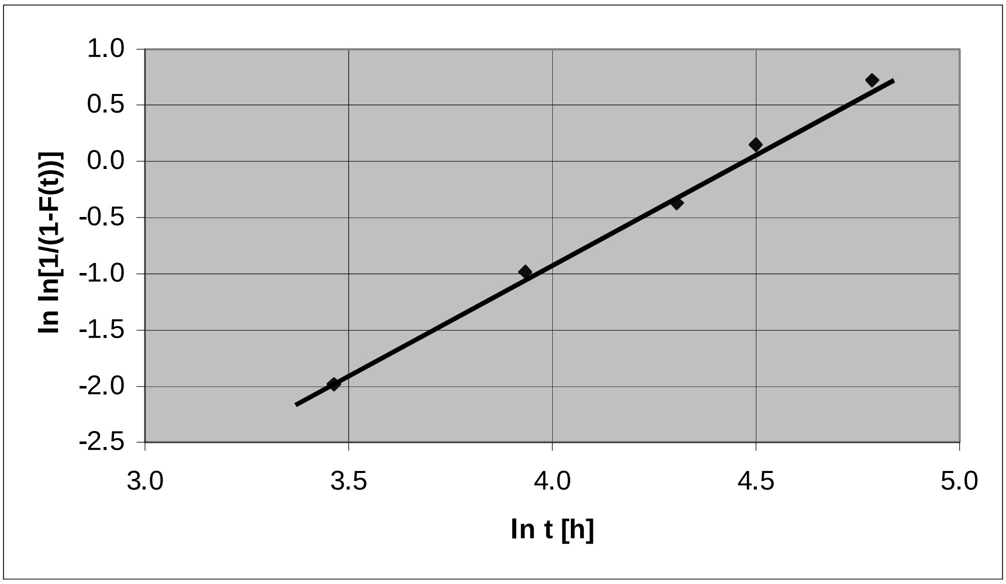
  Intercepção com o eixo das ordenadas: $a = \beta\ln\alpha = -8.95165$

  Estimativa do parâmetro de forma (coef. angular): $\hat{\beta} = b = 2.01553$

  Estimativa do parâmetro de escala: $\hat{\alpha} = 84.88845\,hrs$

  Coeficiente de determinação: $r^2 = 0.9986$ (evidenciando que a hipótese da distribuição de Weibull é bastante plausível)

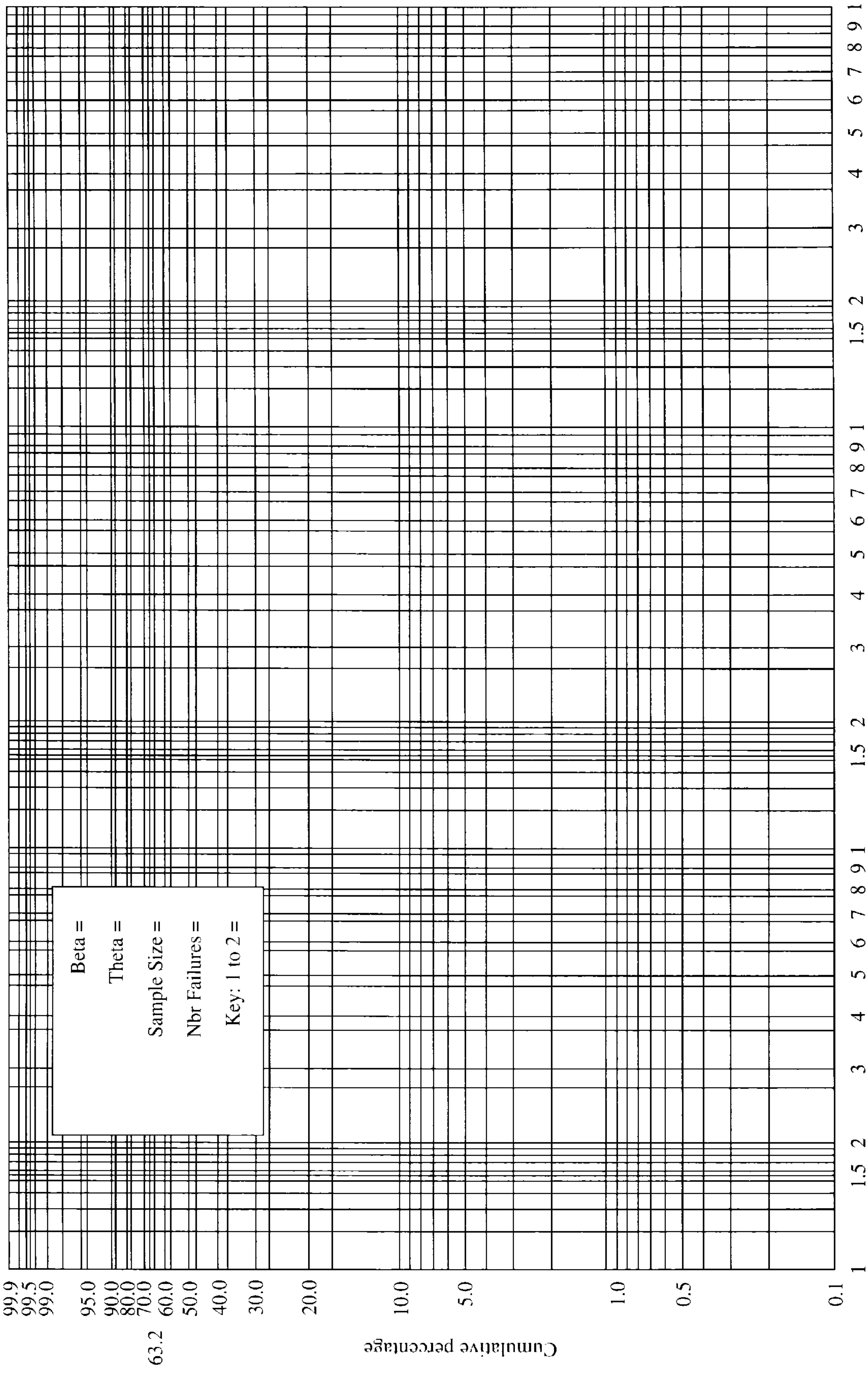
- O gráfico resultante desta regressão linear é mostrado a seguir:



- Procedimento baseado em papel de probabilidade (distribuição de Weibull):
  - O papel de probabilidade para a distribuição de Weibull é construído usando-se uma escala logarítmica para o eixo das abcissas uma vez que temos $\ln t_i$, enquanto que o eixo das ordenadas é baseado na transformação acima apresentada, ou seja,

$$\hat{F}(t_i) \leftrightarrow \ln\ln\left[\frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}\right]$$

  - É importante notar que nós devemos entrar apenas com os tempos de falha t_i no eixo das abcissas uma vez que no papel de probabilidade este eixo já está transformado
  - Da mesma forma, como é mostrado na figura adiante, nós devemos entrar com as estimativas $\hat{F}(t_i)$ no eixo das ordenadas pois o mesmo já incorpora a transformação acima apresentada
  - A figura que segue mostra o papel de probabilidade específico para a distribuição de Weibull


Beta =
Theta =
Sample Size =
Nbr Failures =
Key: 1 to 2 =
Cumulative percentage
99.9
99.5
99.0
95.0
90.0
80.0
70.0
63.2
60.0
50.0
40.0
30.0
20.0
10.0
5.0
1.0
0.5
0.1
1 1.5 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1.5 2 3 4 5 6 7 8 9 1 1.5 2 3 4 5 6 7 8 9 1

- O parâmetro de escala pode ser estimado a partir do ponto na reta que corresponde a 63.2% das falhas, uma vez que para a distribuição de Weibull $F(\alpha) = 0.632$. Note que a linha correspondendo a 63.2% está destacada no papel de probabilidade
- O parâmetro de forma pode ser estimado a partir do coeficiente angular da reta ajustada "no olho":
  - Entretanto, devemos tomar cuidado ao utilizar uma régua para encontrar o coeficiente angular diretamente do gráfico pois nem todos os papéis são construídos de forma que os comprimentos unitários nos eixos das abcissas e ordenadas são equivalente
  - No papel de probabilidade utilizado vemos que existe uma escala de 1 para 2, ou seja, 1 unidade na abcissa equivale a 2 unidades na ordenada
  - Alternativamente, podemos resolver a equação linearizada da distribuição de Weibull para β obtendo-se

$$\hat{\beta} = \frac{\ln\ln\left[1/\left(1 - \hat{F}(t_i)\right)\right]}{\ln t_i - \ln\hat{\alpha}}$$

Uma vez que $\hat{\alpha}$ é obtido, $\hat{\beta}$ pode ser estimado para diversos valores de t_i e $\hat{F}(t_i)$ e calculamos a média destas estimativas (veja o seguinte exemplo)

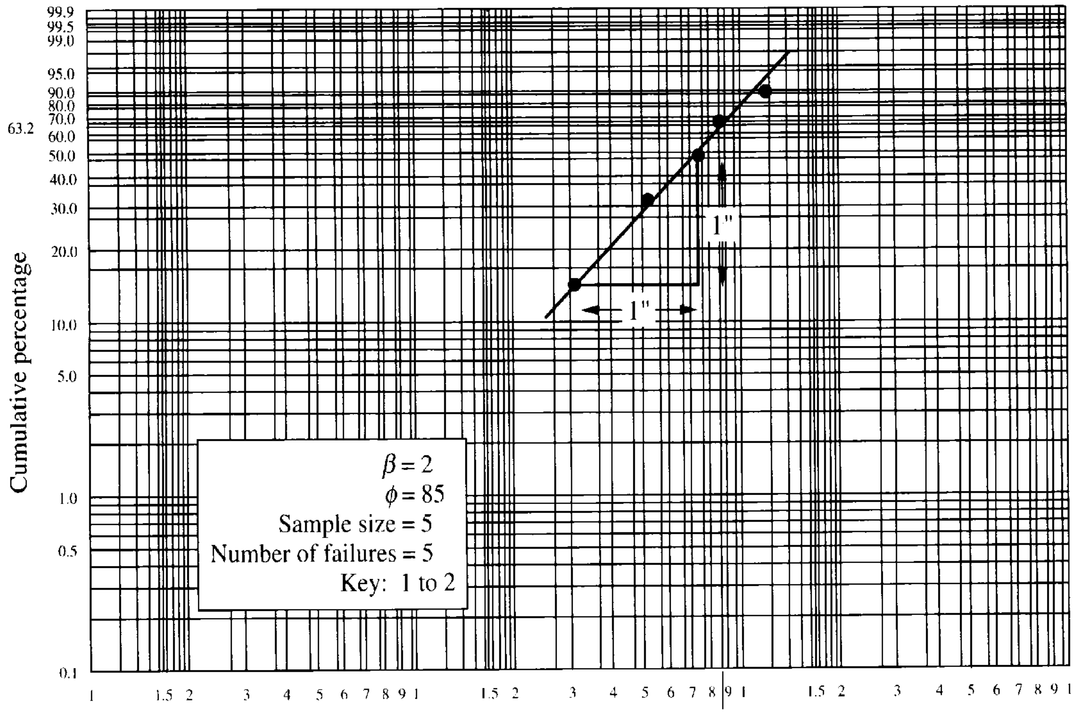
☞ *Exemplo 23*:

Para os temos de falha fornecidos no exemplo 22, determine os parâmetros da distribuição de Weibull a partir do papel de probabilidade.

- A tabela a seguir mostra os pares ($t_i , \hat{F}(t_i)$) a serem traçados no papel de probabilidade

i	Tempo de Falha [h]	$F(t_i)$=(i-0.3)/(5+0.4)
1	32	0.13
2	51	0.31
3	74	0.50
4	90	0.69
5	120	0.87

- Os pares ordenado na tabela acima são então traçados em papel de probabilidade de Weibull resultando no seguinte gráfico:



- Uma estimativa do parâmetro de forma pode ser obtida a partir do coeficiente angular da reta ajustada "no olho" utilizando uma régua e lembrando de efetuar a correção de diferença de escala entre os dois eixos:

$$\hat{\beta} = 2\,x\,\frac{1\,polegada}{1\,polegada} = 2.0$$

- Alternativamente, e de preferência, outra estimativa do parâmetro de forma é obtido a partir da média de duas outras estimativas:

$$\hat{\beta} = \frac{\ln \ln\left[1/(1-0.31)\right]}{\ln 51 - \ln 85} = 1.94$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{\ln \ln\left[1/(1-0.87)\right]}{\ln 120 - \ln 85} = 2.06$$

A média destes dois valores resulta em: $\hat{\beta} = 2.0$

- A vida característica (parâmetro de escala) é obtido como sendo $\hat{\alpha} = 85hrs$ o qual corresponde ao instante para o qual temos 63.2% de falhas (no eixo das ordenadas)

23. Distribuições Discretas de Probabilidade

- Para finalizar este capítulo, discutiremos algumas distribuições discretas de probabilidade, ou seja, quando a variável aleatória assume valores específicos a partir de um conjunto finito ou infinito
- Vimos que neste caso a variável aleatória é contável:
  - Número de unidades defeituosas produzidas em uma linha de produção
  - Número de reparos efetuados em um determinado período de tempo
  - Número de vezes que uma bomba de água de emergência funciona satisfatoriamente na partida
- Em particular, serão apresentadas as seguintes distribuições discretas muito utilizadas em análise de confiabilidade e análise de risco:
  - Distribuição Binomial
  - Distribuição de Poisson

24. A Distribuição Binomial

- Considere um experimento que possua somente dois resultados possíveis:
  - Sucesso com probabilidade p
  - Falha com probabilidade $1 - p$
- Considere a realização de uma seqüência de n experimentos independentes:
  - Seja X a v.a. discreta que representa o *número total de sucessos* nestes n experimentos
  - Como o número de sucessos é um número inteiro e não negativo, temos que a v.a. X pode assumir os seguintes valores: $X = 0,1,2,\ldots,n$
  - Ou seja, o espaço amostral é $S = \{0,1,2,\ldots,n\}$ onde nenhum sucesso ($X = 0$) até no máximo n sucessos ($X = n$) onde todos os experimentos deram o resultado "desejado" (sucesso)
- A distribuição de probabilidade $P(x)$ da v.a. X (número de sucessos) é dada pela *distribuição Binomial*:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad ; \; x = 0,1,2\ldots,n$$

onde $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}$

- A distribuição Binomial fornece a probabilidade que um evento (sucesso no nosso caso) ocorra exatamente *x* vezes em *n* tentativas independentes:
  - $X = x$ Número de vezes que o evento ocorreu
  - p Probabilidade que o evento ocorre, ou seja, a probabilidade de sucesso
- Note que *X* corresponde ao número de eventos em *n* tentativas. Logo, p é a probabilidade de sucesso e não a probabilidade de obter-se *x* sucessos
- Necessidade prática para a distribuição Binomial?
  - Existem uma variedade enorme de situações na prática na qual nós precisamos da distribuição Binomial
  - Por exemplo, considere um grupo de 10 unidades (como carros, bombas, um produto petroquímico) os quais foram obtidos a partir de uma linha de produção. Da experiência operacional, considera-se que esta linha produz 10% de unidades defeituosas (fora das especificações). Nós queremos saber a probabilidade de esta linha de produção fornecer 1 unidade defeituosa, 2 unidades defeituosas, no máximo 1 unidade defeituosa, e 3 ou mais unidades defeituosas.
  - Nos próximos exemplos discutiremos estas situações

☞ *Exemplo 24*:

Seja *X* o número de componentes falhos entre 5 componentes independentes e idênticos. Cada componente tem 1 chance em 100 de falhar.

- Então, a v.a. *X* pode assumir os valores $X = 0,1,2,3,4,5$ e possui uma distribuição Binomial com parâmetros:

$$p = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$n = 5$$

- A probabilidade de exatamente 1 falha é:

$$P(X = 1) = \binom{5}{1}(0.01)^1(1 - 0.01)^{5-1}$$

$$P(X = 1) = 0.048 \rightarrow 4.8\%$$

☞ *Exemplo 25*:

Um grupo de 15 válvulas é observado. A partir da experiência operacional, sabe-se que a probabilidade de uma falha dentro das primeiras 500 horas de operação após a válvula sofrer manutenção é de 0.18. Calcule a probabilidade de que essas 15 válvulas venham a sofrer 0, 1, 2, ..., 15 falhas dentro das primeiras 500 horas de operação após manutenção.

- Consideremos X o número de válvulas falhas antes de 500 hrs de operação após manutenção. Como temos 15 válvulas:

  $n = 15,\ X = \{0,1,2,\dots,15\},\ p = 0.18$

- Logo, X é distribuída de acordo com a distribuição Binomial:

$$P(x) = \binom{15}{x} p^x (1-p)^{15-x}$$

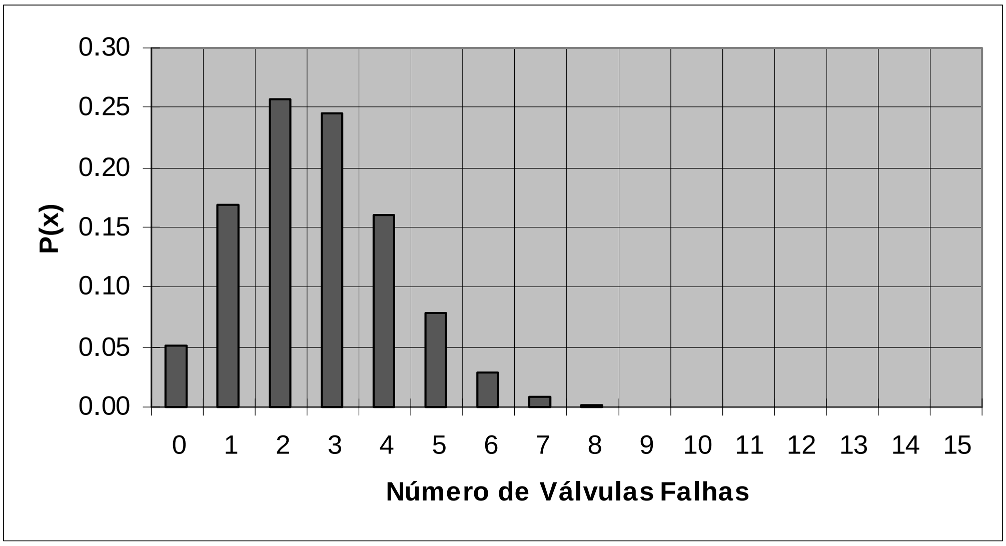
Assim,

$$P(X = 0) = \binom{15}{0} 0.18^0 (1-0.18)^{15-0} = 5.1x10^{-2}$$

- Desta forma obtemos a seguinte tabela:

x_i	$P(X=x_i)$	x_i	$P(X=x_i)$	x_i	$P(X=x_i)$
0	5.10E-02	6	2.85E-02	12	2.90E-07
1	1.68E-01	7	8.05E-03	13	1.47E-08
2	2.58E-01	8	1.77E-03	14	4.61E-10
3	2.45E-01	9	3.02E-04	15	6.75E-12
4	1.61E-01	10	3.98E-05		
5	7.80E-02	11	3.97E-06	Total	1.0

- A seguir mostramos o gráfico da probabilidade de falha:



25. A Distribuição de Poisson

- Este modelo assume que os eventos de interesse estão aleatoriamente e igualmente dispersados no tempo ou no espaço de acordo com alguma intensidade constante λ
- Por exemplo:
  - Número de falhas observadas em uma planta de processo por ano (domínio do tempo)
  - Número de ônibus chegando em uma estação por hora (domínio do tempo)
  - Número de rachaduras por unidade de área em uma placa de metal (domínio do espaço)
- Observe que o domínio do tempo ou espaço não são aleatórios (são fixos)
- Uma v.a. X que segue a distribuição de Poisson representa o número de eventos (ocorrências): X deve somente assumir valores inteiros
- A *distribuição de Poisson* tem a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(x) = \frac{\rho^x e^{-\rho}}{x!} \; ; \; X = 0,1,2,\ldots$$

onde ρ é o parâmetro da distribuição que corresponde também a média da distribuição

- Como ρ é a média da distribuição, se X é o número de eventos observados em um intervalo de tempo não aleatório (fixo) t, então

$$\rho = \lambda t$$

onde λ é a *intensidade ou taxa de ocorrência* dos eventos

☞ *Exemplo 26*:

Seja X uma v.a. representando o número de falhas e subseqüentes reparos de uma bomba durante um período de 1 ano. Assumindo que X segue uma distribuição de Poisson com média $\rho = 2$ falhas por ano, qual a probabilidade de ocorrência de no máximo 1 falha por ano?

- Temos que:

$$F(1) = P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} \frac{\rho^x e^{-\rho}}{x!} = \sum_{x=0}^{1} \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

Logo,

$$P(X \leq 1) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.406$$

☞ *Exemplo 27*:

Uma unidade petroquímica recebe energia elétrica de uma subestação externa a fábrica. A partir da experiência operacional, sabe-se que a queda de energia vinda desta subestação ocorre a uma taxa de 1 vez por ano. (a) Qual é a probabilidade que em um período de 3 anos não ocorram quedas de energia? (b) Que pelo menos duas quedas de energia venham a ocorrer?

- Sejam $\lambda = 1/ano$ e $t = 3anos$ (período de tempo fixo, não aleatório)

Logo, a média é $\rho = \lambda t = 3$

Assim,

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0.05 \rightarrow 5\%$$

- Pelo menos duas quedas:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{x=0}^{1} P(x)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!} - \frac{3^1 e^{-3}}{1!}$$

$$P(X \geq 2) = 0.801 \rightarrow 80.1\%$$